

Федеральное агентство по образованию
Московский государственный горный университет

Кафедра электротехники и информационных систем

В.А. РУМЯНЦЕВА

**РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО
ТОКА**

Методические указания

к самостоятельной работе по дисциплине «Общая электротехника и
электроника» для студентов, обучающихся по специальности 210100
«Управление и информатика в технических системах»

Москва 2006

Настоящие методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов при изучении раздела «Цепи переменного синусоидального тока» курсов «Теоретические основы электротехники» и «Общая электротехника и электроника». Содержатся варианты второго расчетно-графического задания и примеры экзаменационных задач, приводятся примеры их решения, позволяющие освоить основные методы расчета электрических цепей синусоидального тока.

СОДЕРЖАНИЕ.

1.	ВВЕДЕНИЕ.....	4
2.	ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ	5
2.1.	Задание	5
2.2.	Схемы к вариантам домашнего задания	6
2.3.	Варианты домашнего задания.....	11
3.	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА	16
3.1.	Элементы цепей синусоидального тока.	18
3.2.	Участок цепи синусоидального тока с последовательным соединением элементов.	19
3.3.	Участок цепи синусоидального тока с параллельным соединением элементов.	23
4.	СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....	25
4.1.	Комплексные числа.....	25
4.2.	Комплексное сопротивление	27
4.3.	Комплексы токов и напряжений.....	31
4.4.	Законы электрических цепей в комплексной форме	33
5.	ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ	40
	Фрагмент среды Mathcad2000.....	48
6.	РЕЗОНАНС В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....	48
6.1.	Резонанс напряжений.....	49
6.2.	Резонанс токов.....	52
6.3.	Резонанс в сложной цепи.	53
7.	УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА АКТИВНЫХ И РЕАКТИВНЫХ МОЩНОСТЕЙ	56
8.	ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА ТОКОВ И ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЙ.....	62
9.	ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ.....	65
10.	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	65

1. ВВЕДЕНИЕ

В электрических цепях переменного синусоидального тока токи и напряжения всех ветвей изменяются во времени по синусоидальному закону. Общий вид этого закона для силы тока следующий (рис. 1.1):

$$i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi).$$

Данное выражение для силы тока в каждый момент времени называется мгновенным значением тока. Величина I_m называется амплитудой, она равна максимальному значению тока.

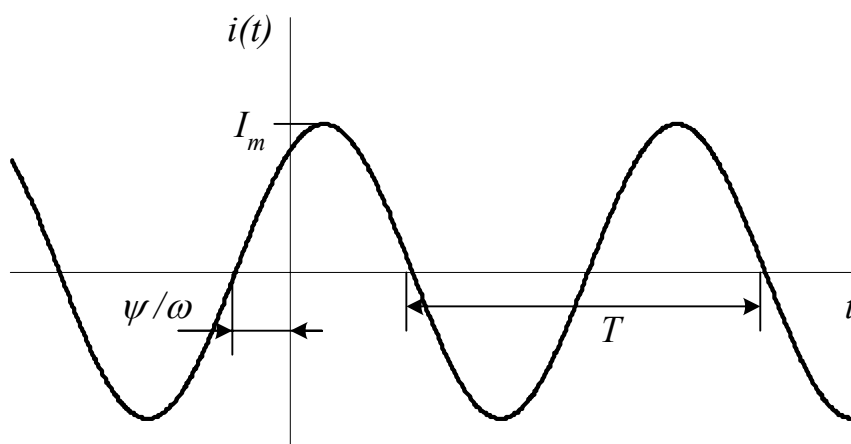


Рис. 1.1. Зависимость мгновенного значения тока от времени

Период синусоидальной функции T определяется частотой синусоидальных колебаний $f = 1/T$. Круговая или циклическая частота f связана с угловой частотой $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$. Начальная фаза ψ определяет сдвиг синусоиды относительно оси ординат.

В цепях синусоидального тока присутствует источник синусоидального тока или напряжения. Может быть несколько источников одинаковой частоты. Если в цепи несколько источников синусоидального тока или напряжения с разными частотами, токи и напряжения цепи не будут синусоидальными, и, следовательно, цепь не будет являться цепью синусоидального тока. В данном разделе такие цепи не рассматриваются.

Таким образом, в цепях синусоидального тока переменные состояния (токи и напряжения всех ветвей) изменяются во времени по

синусоидальному закону с одной и той же частотой, но каждая со своей начальной фазой и амплитудой. Эти две характеристики позволяют задать значение тока или напряжения в любой момент времени.

2. ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

2.1. Задание

Для цепи, изображенной на рисунке, в соответствии с номером варианта:

Обязательные пункты задания

(выполняются без учета взаимной индукции)

1. Составить систему независимых уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений.
2. Составить систему независимых уравнений по законам Кирхгофа для комплексов токов и напряжений.
3. Символическим методом найти комплексы всех токов и комплексы напряжения всех ветвей.
4. Найти мгновенные значения всех токов цепи.
5. Построить график зависимостей от времени мгновенных значений тока и напряжения на всех элементах одной любой ветви, содержащей не менее трех элементов.
6. Построить векторную диаграмму токов.
7. Построить топографическую диаграмму напряжений для всех точек, принадлежащих внешнему замкнутому контуру.
8. Составить уравнение баланса активных и реактивных мощностей и с его помощью проверить правильность нахождения токов ветвей.

Дополнительные пункты задания

9. Символическим методом найти комплексы всех токов и комплексы напряжения всех ветвей с учетом взаимной индукции.
10. Составить уравнение баланса активных и реактивных мощностей с учетом взаимной индукции и с его помощью проверить правильность нахождения токов ветвей.

2.2. Схемы к вариантам домашнего задания

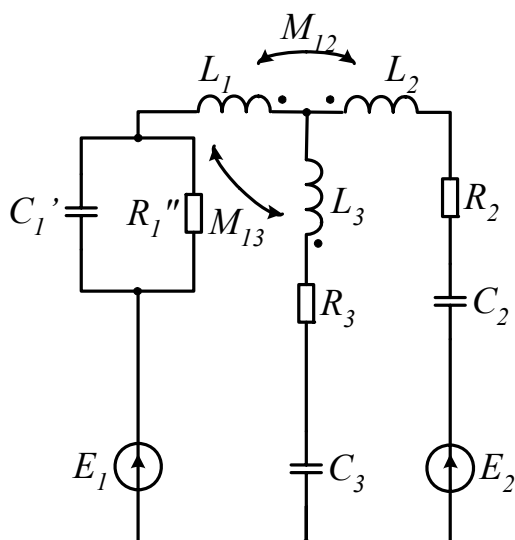


Рис. 2.1

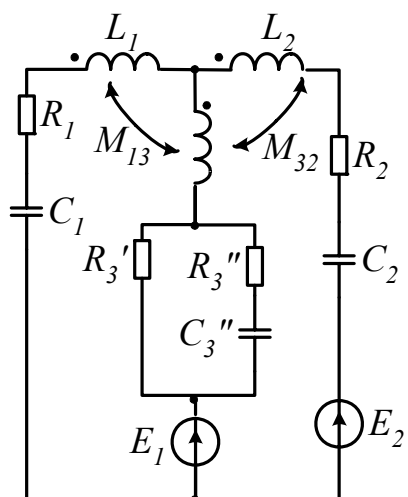


Рис. 2.2

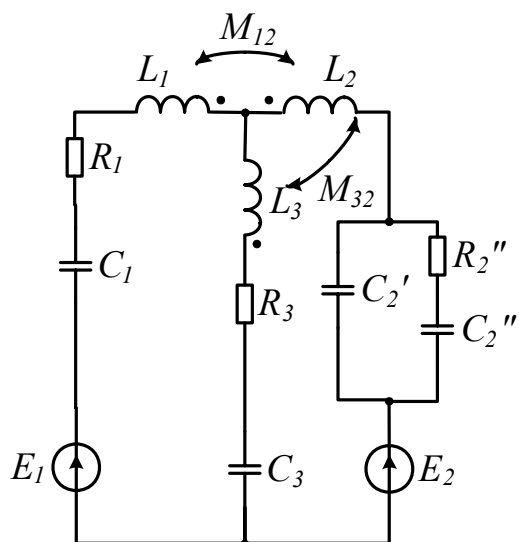


Рис. 2.3

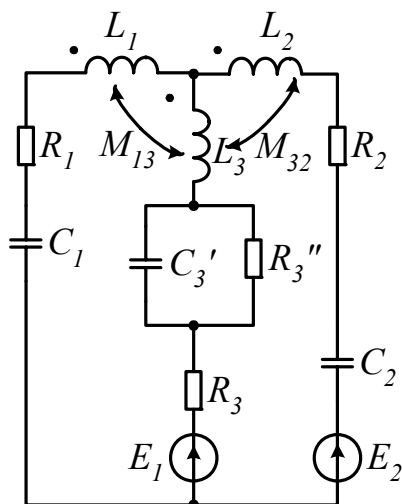


Рис. 2.4

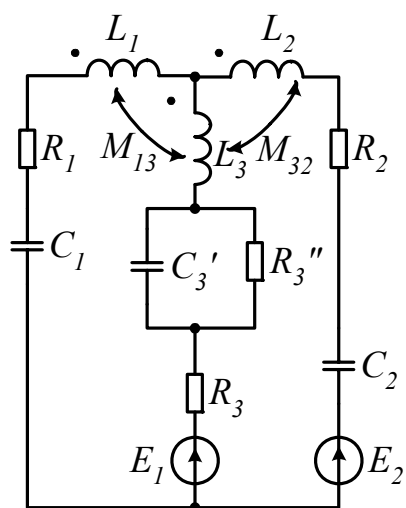


Рис. 2.5

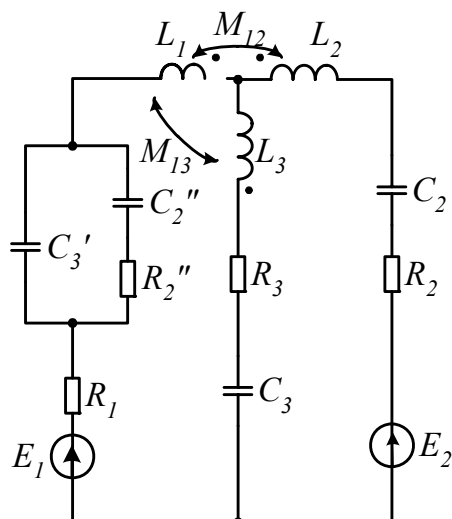


Рис. 2.6

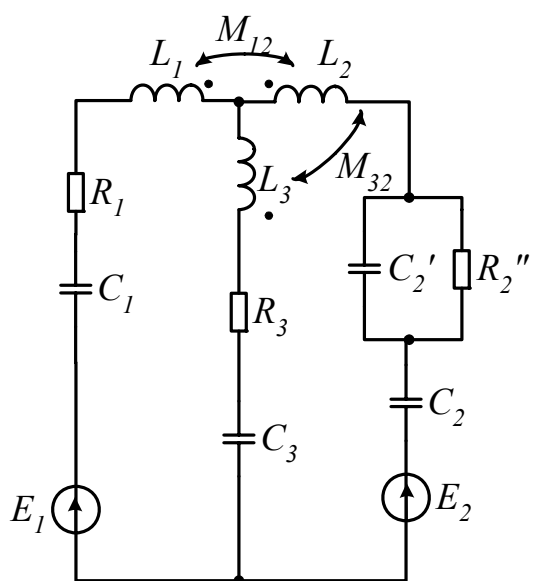


Рис. 2.7

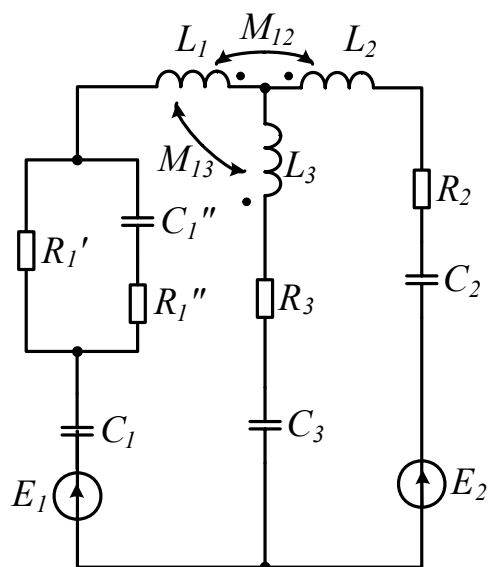


Рис. 2.8

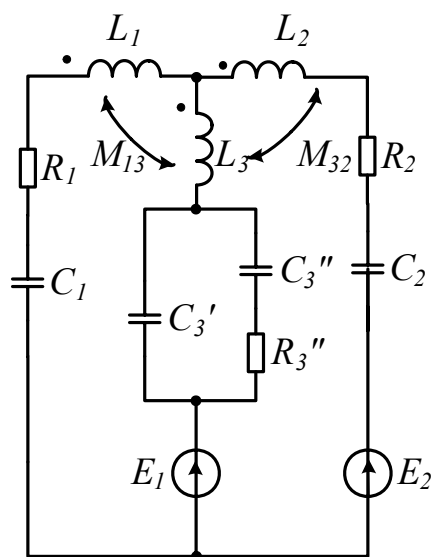


Рис. 2.9

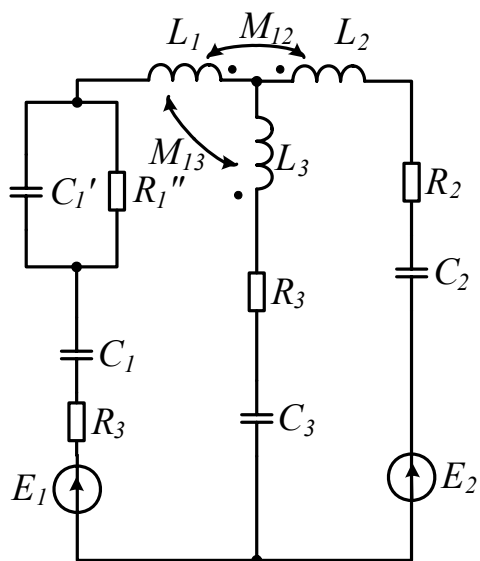


Рис. 2.10

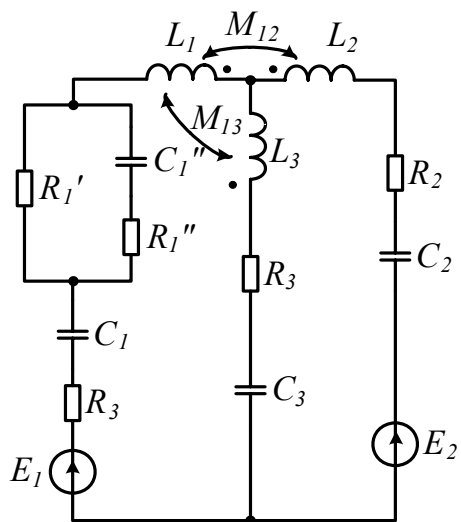


Рис. 2.11

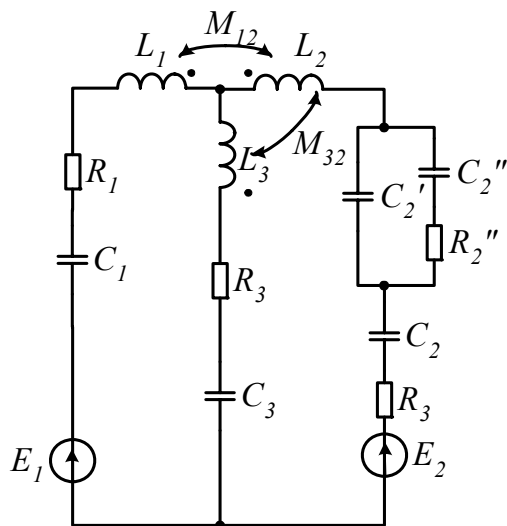


Рис. 2.12

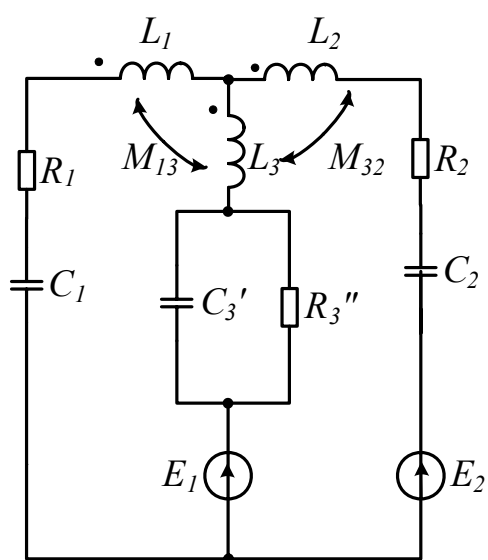


Рис. 2.13

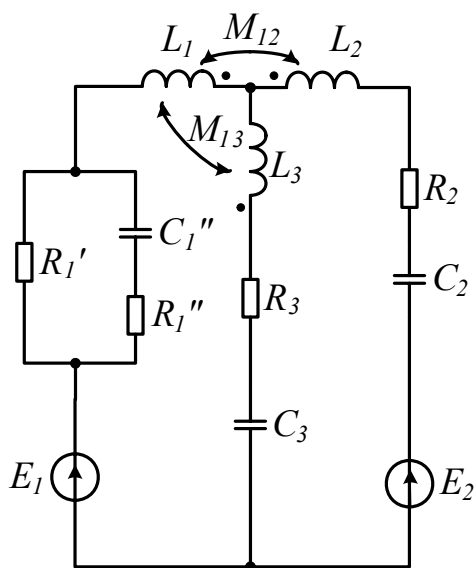


Рис. 2.14

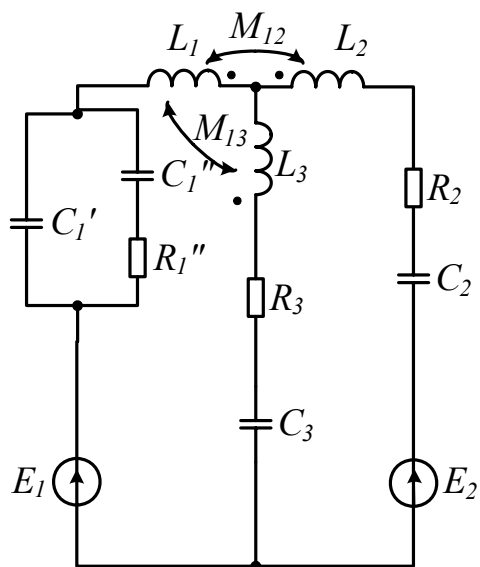


Рис. 2.15

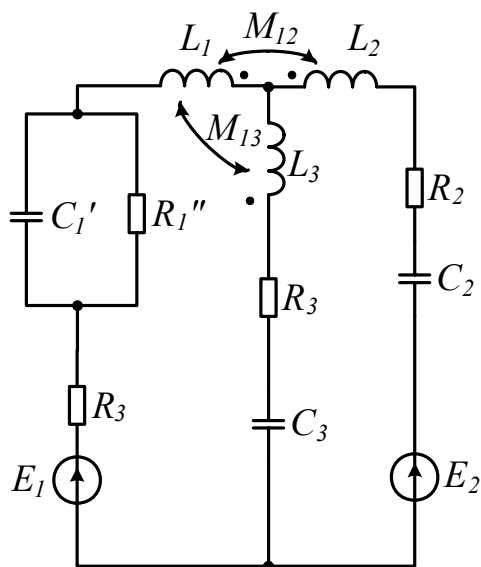


Рис. 2.16

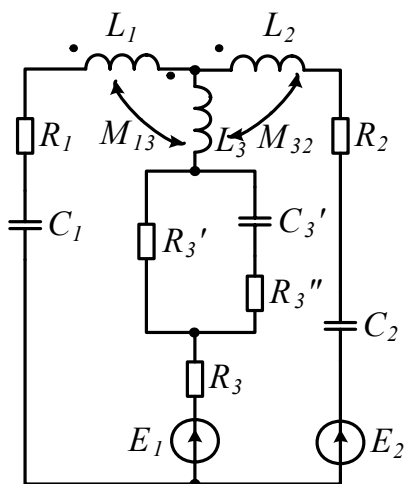


Рис. 2.17

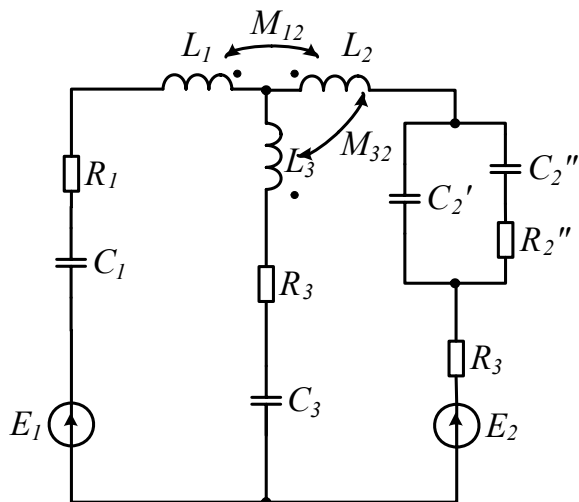


Рис. 2.18

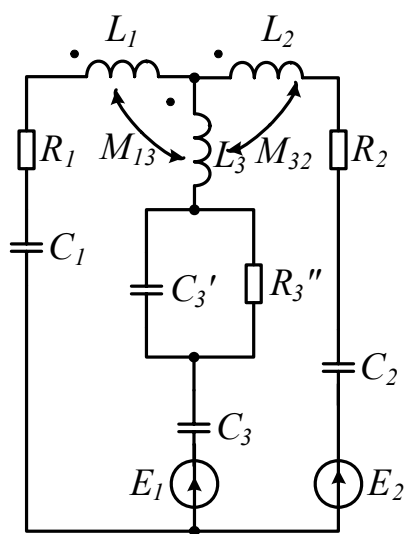


Рис. 2.19

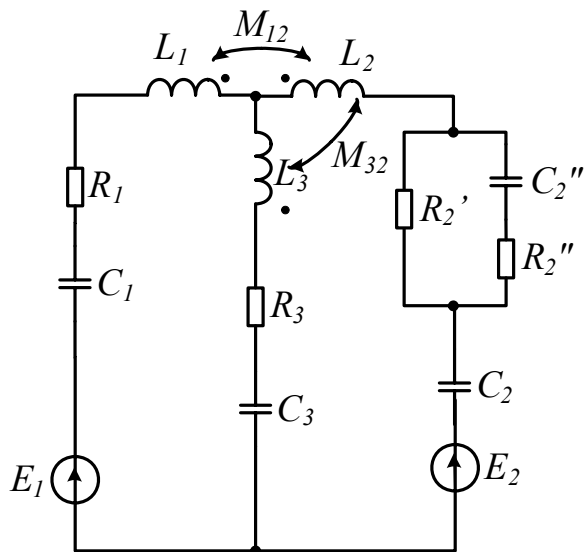


Рис. 2.20

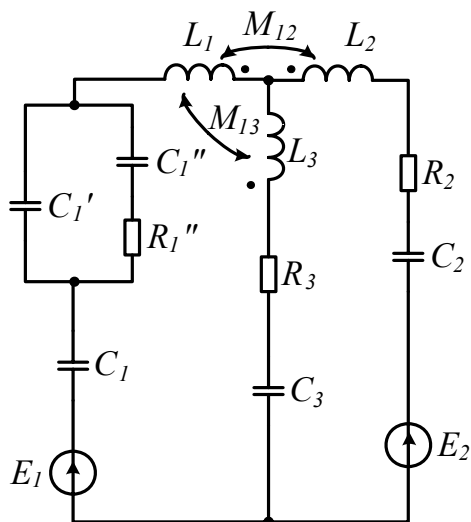


Рис. 2.21

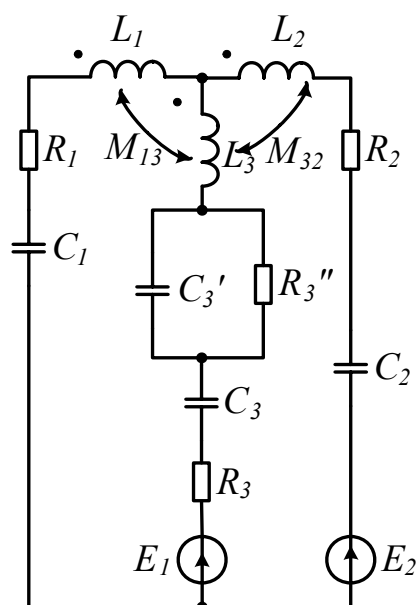


Рис. 2.22

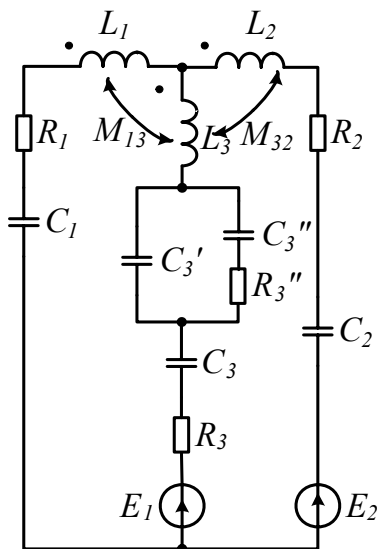


Рис. 2.23

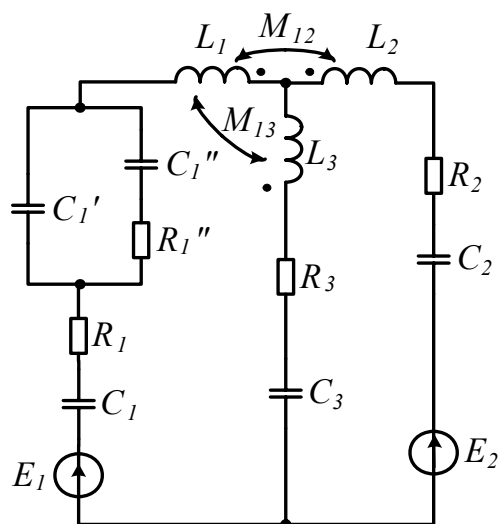


Рис. 2.24

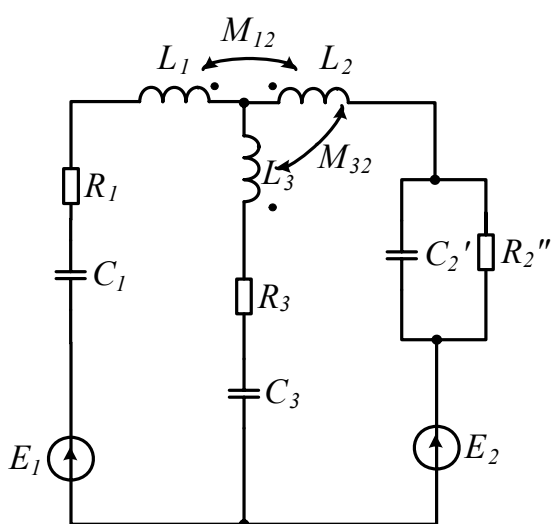


Рис. 2.25

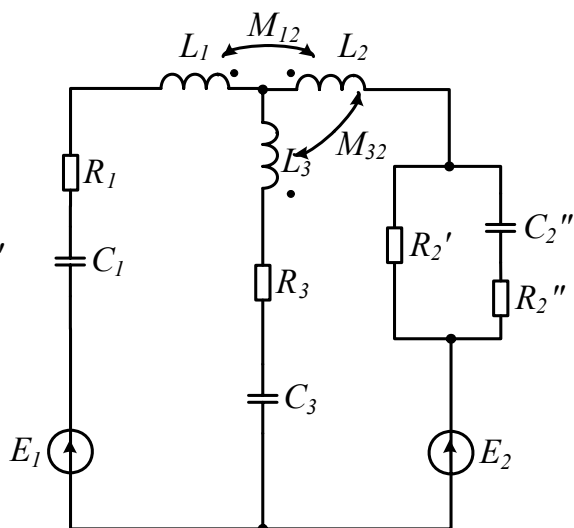


Рис. 2.26

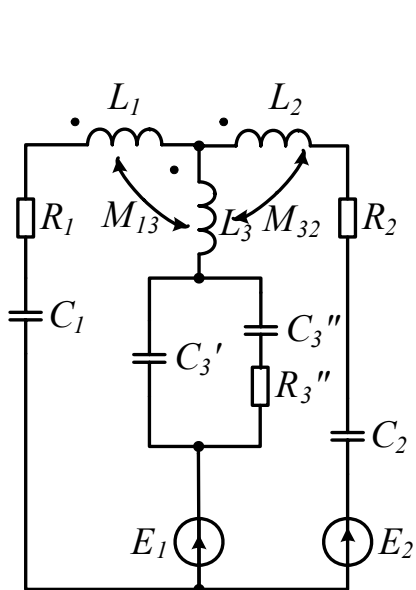


Рис. 2.27

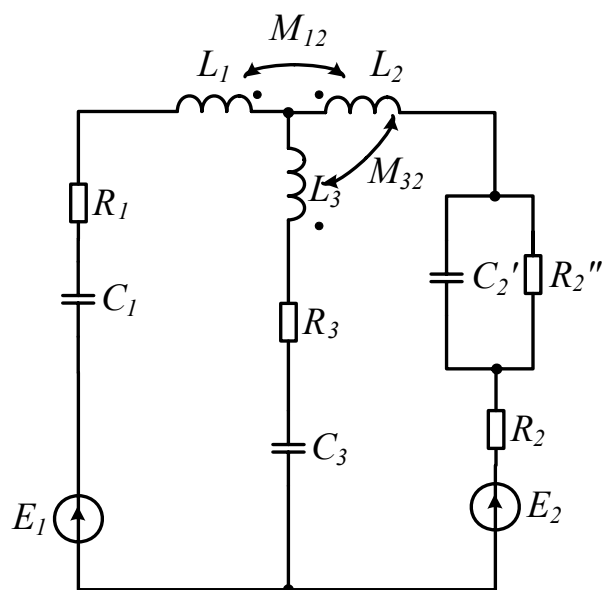


Рис. 2.28

2.3. Варианты домашнего задания

Таблица 1

№	Рис	L ₁	C ₁	R ₁	L ₂	C ₂	R ₂	L ₃	C ₃	R ₃	C'	R'	C''	R''
		мГн	нФ	Ом	мГн	нФ	Ом	мГн	нФ	Ом	нФ	Ом	нФ	Ом
1	2.1	57	-	-	51	160	190	8	430	464	410	-	-	556
2	2.2	11	660	190	10	320	185	21	-	-	-	458	180	892
3	2.3	61	620	430	50	-	-	18	460	647	440	-	390	285
4	2.4	14	180	290	13	220	455	80	-	528	680	-	-	695
5	2.5	24	140	580	81	-	900	22	190	710	-	342	380	406
6	2.6	83	-	170	17	340	196	60	450	230	600	-	120	568
7	2.7	61	680	510	84	490	-	82	440	219	640	-	-	562
8	2.8	47	640	-	9	160	232	83	120	484	-	437	150	780
9	2.9	47	400	128	34	380	826	18	-	-	670	-	80	273
10	2.10	48	140	163	39	410	198	53	280	140	260	-	-	863
11	2.11	63	240	695	85	350	745	85	460	934	-	110	290	532
12	2.12	57	350	146	50	380	316	54	320	899	210	-	50	843
13	2.13	6	270	75	64	330	698	27	-	-	430	-	-	456
14	2.14	14	-	-	27	320	736	35	500	440	-	372	150	662
15	2.15	78	-	-	50	200	167	73	450	646	310	-	310	555
16	2.16	69	-	170	39	300	843	11	160	479	600	-	-	396
17	2.17	37	420	350	55	-	541	55	210	617	-	424	260	754
18	2.18	52	770	100	63	-	455	22	490	861	590	-	320	801
19	2.19	86	600	560	42	420	990	60	390	-	620	-	-	525
20	2.20	20	140	396	6	500	-	56	360	587	-	447	190	509
21	2.21	16	790	-	56	350	498	43	390	225	240	-	90	465
22	2.22	86	350	670	54	340	855	39	150	577	380	-	-	590
23	2.23	7	120	400	24	300	483	55	250	280	400	-	140	786
24	2.24	10	410	365	5	280	870	86	470	624	350	-	130	207
25	2.25	16	120	615	12	-	-	38	110	605	570	-	-	228
26	2.26	78	790	564	78	-	-	21	280	519	-	269	70	379
27	2.27	66	420	690	74	390	847	54	-	-	380	-	70	695
28	2.28	6	590	450	64	-	526	58	160	639	280	-	-	293
29	2.1	65	-	-	50	360	76	9	300	813	270	-	-	800

№	Рис	L ₁	C ₁	R ₁	L ₂	C ₂	R ₂	L ₃	C ₃	R ₃	C'	R'	C''	R''
		мГн	нФ	Ом	мГн	нФ	Ом	мГн	нФ	Ом	нФ	Ом	нФ	Ом
30	2.2	23	580	590	17	320	594	27	-	-	-	180	360	353
31	2.3	19	730	300	67	-	-	81	190	915	320	-	190	419
32	2.4	34	570	492	8	500	851	67	-	741	370	-	-	625
33	2.5	36	560	75	60	-	675	38	320	684	-	114	380	869
34	2.6	73	-	240	12	170	850	82	440	349	670	-	50	471
35	2.7	50	110	440	86	230	-	38	320	340	250	-	-	366
36	2.8	73	-	590	28	360	348	35	450	153	-	81	200	615
37	2.9	17	720	375	88	270	322	68	-	-	650	-	260	212
38	2.10	39	800	535	30	370	183	68	250	197	640	-	-	842
39	2.11	17	680	357	36	300	843	22	110	125	-	383	270	357
40	2.12	11	820	530	24	420	620	63	260	658	540	-	50	876
41	2.13	54	530	440	25	100	290	36	-	-	340	-	-	480
42	2.14	52	-	-	82	250	52	14	180	438	-	482	160	435
43	2.15	31	-	-	82	430	816	22	150	492	500	-	350	638
44	2.16	74	-	164	12	460	250	61	460	195	270	-	-	403
45	2.17	29	780	330	20	-	576	63	190	750	-	28	210	829
46	2.18	81	600	390	71	-	158	12	320	835	380	-	200	430
47	2.19	68	590	540	23	480	765	7	270	-	440	-	-	522
48	2.20	36	300	175	5	250	-	31	450	335	-	117	250	489
49	2.21	24	730	-	15	460	465	17	210	171	690	-	170	285
50	2.22	50	670	350	17	280	541	16	370	280	460	-	-	556

Таблица 2

№	E ₁	E ₂	ψ ₁	ψ ₂	f	k ₁₂	k ₃₂	k ₁₃
	В	В	рад	рад	кГц			
1	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	6	0,52	-	0,85
2	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	2	-	0,95	0,64
3	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	8	0,83	0,79	-

№	E ₁	E ₂	ψ ₁	ψ ₂	f	k ₁₂	k ₃₂	k ₁₃
	B	B	рад	рад	кГц			
4	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	5	-	0,91	0,65
5	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	8	0,93	0,91	-
6	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	4	0,84	-	0,92
7	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	10	0,81	0,84	-
8	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	10	0,80	-	0,53
9	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	7	-	0,66	0,51
10	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	2	0,89	-	0,95
11	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	5	0,90	-	0,64
12	5	10	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	1	0,57	0,54	-
13	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	8	-	0,78	0,58
14	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	7	0,58	-	0,67
15	5	10	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	3	0,88	-	0,80
16	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	10	0,89	-	0,82
17	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	9	-	0,81	0,56
18	5	10	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	9	0,82	0,68	-

№	E ₁	E ₂	ψ ₁	ψ ₂	f	k ₁₂	k ₃₂	k ₁₃
	B	B	рад	рад	кГц			
19	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	7	-	0,90	0,60
20	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	8	0,94	0,77	-
21	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	8	0,64	-	0,71
22	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	5	-	0,87	0,78
23	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	7	-	0,54	0,78
24	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	9	0,61	-	0,63
25	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	5	0,89	0,72	-
26	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	5	0,59	0,76	-
27	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	8	-	0,89	0,93
28	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	4	0,67	0,95	-
29	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	4	0,78	-	0,53
30	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	2	-	0,68	0,68
31	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	10	0,67	0,92	-
32	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	5	-	0,62	0,77
33	5	10	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	5	0,65	0,74	-

№	E ₁	E ₂	ψ ₁	ψ ₂	f	k ₁₂	k ₃₂	k ₁₃
	B	B	рад	рад	кГц			
34	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	3	0,78	-	0,59
35	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	3	0,58	0,52	
36	5	10	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	7	0,62	-	0,64
37	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	9	-	0,62	0,88
38	5	10	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	5	0,70	-	0,89
39	5	10	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	10	0,79	-	0,70
40	5	10	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	4	0,62	0,64	-
41	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	6	-	0,93	0,64
42	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	9	0,55	-	0,60
43	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	3	0,72	-	0,63
44	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	6	0,82	-	0,89
45	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	6	-	0,59	0,88
46	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	6	0,93	0,90	-
47	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	10	-	0,52	0,70
48	10	5	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	7	0,73	0,82	-

№	E ₁	E ₂	ψ ₁	ψ ₂	f	k ₁₂	k ₃₂	k ₁₃
	B	B	рад	рад	кГц			
49	10	5	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	2	0,86	-	0,93
50	10	5	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	5	-	0,55	0,54

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Для определения силы тока или напряжения какой-либо ветви в каждый момент времени (мгновенного значения) необходимо узнать три параметра: частоту, амплитуду и начальную фазу. Поскольку частота является одинаковой для всей цепи, остается два параметра: амплитуда и начальная фаза.

Часто для характеристики тока или напряжения используют понятие *действующего значения*. Действующим значением периодического тока или напряжения называют среднеквадратическое значение тока или напряжения за период. Амперметры и вольтметры переменного тока показывают именно действующее значение тока и напряжения соответственно. При синусоидальной зависимости от времени действующее значение пропорционально амплитуде и отличается от него в $\sqrt{2}$ раз:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin(\omega \cdot t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Для решения несложных задач используются векторные диаграммы токов и напряжений. На них токи и напряжения представляются в виде векторов, длина которых равна действующему значению, а направление определяется начальной фазой (угол наклона относительно горизонтальной оси равен начальной фазе). Векторы напряжений или токов можно складывать и вычитать. Будем обозначать векторы подчеркиванием снизу.

Пример 1. На участке цепи, показанном на рис. 3.1, даны мгновенные значения силы тока: $i_1(t) = 3\sin(\omega \cdot t)$, $i_2(t) = 3\sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$. Найти мгновенное значение силы тока $i_3(t)$.

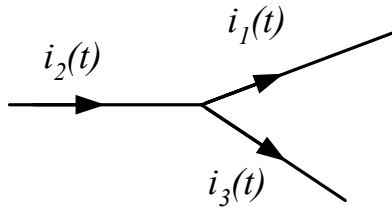


Рис. 3.1

Решение. По первому закону Кирхгофа сумма токов в узле равна нулю. Ток $i_2(t)$ втекает в узел, а остальные токи вытекают, поэтому можно написать соотношение: $i_2(t) = i_1(t) + i_3(t)$. Представим токи в виде векторов с учетом их действующих значений и начальных фаз, см. рис. 3.2.

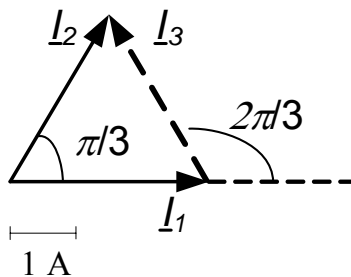


Рис. 3.2

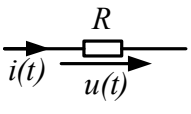
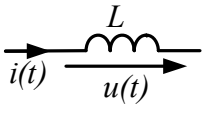
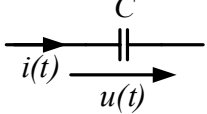
Вектор \underline{I}_1 направлен вдоль горизонтальной оси, поскольку начальная фаза тока $i_1(t)$ равна нулю, а его длина равна $3/\sqrt{2}$. Вектор \underline{I}_2 направлен под углом $\pi/3$ к горизонтали, а его длина равна длине вектора \underline{I}_1 . Для того чтобы выполнялось векторное соотношение $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3$, эти вектора должны составлять треугольник. Поскольку длины векторов равны друг другу, а угол между ними равен $\pi/3$, треугольник на рис. 3.2. равносторонний. Исходя из этого, можно определить длину вектора \underline{I}_3 и его направление. Угол между горизонталью и вектором \underline{I}_3 равен $2\pi/3$.

Теперь мы знаем и амплитуду и начальную фазу, следовательно, можем записать мгновенное значение $i_3(t) = 3 \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right)$.

3.1.Элементы цепей синусоидального тока

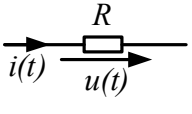
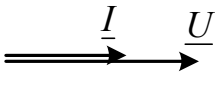
Основные идеализированные элементы цепей синусоидального тока, преобразующие электрическую энергию, это резистор R (Ом) катушка индуктивности L (Гн), конденсатор C (Ф). Связь между током и напряжением на этих элементах выражается следующим образом (табл. 3):

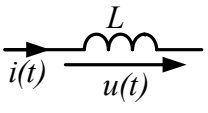
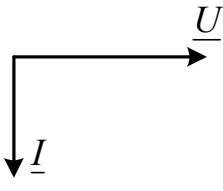
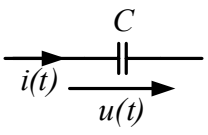

Таблица 3

		
$u(t) = R \cdot i(t),$ $i(t) = \frac{u(t)}{R}.$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0).$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0),$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$

Если напряжение на данных элементах $u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t)$ – синусоидальная функция времени, то силу тока можно определить из табл. 4. Отношения амплитуды напряжения к амплитуде тока называют сопротивлением. Сдвиг фаз между током и напряжением обозначается φ .

Таблица 4

Резистор R		$i(t) = I_m \sin(\omega \cdot t), \varphi = 0,$ $I_m = \frac{U_m}{R}, R$ – активное сопротивление;	
--------------	---	---	---

Катушка индуктивности L		$i(t) = I_m \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right),$ $\varphi = \frac{\pi}{2}, I_m = \frac{U_m}{X_L},$ $X_L = \omega \cdot L -$ индуктивное сопротивление;	
Конденсатор C		$i(t) = I_m \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right),$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}, I_m = \frac{U_m}{X_C},$ $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} -$ емкостное сопротивление.	

3.2. Участок цепи синусоидального тока с последовательным соединением элементов

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 3.3. Пусть напряжение источника: $u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. Поскольку все элементы соединены последовательно, через них протекает один и тот же ток. Удобно за ноль фазы принять фазу силы тока. Сдвиг фазы напряжения по отношению к току определен для всех элементов в отдельности (табл.2). Исходя из этого, можно построить векторную диаграмму напряжений (рис. 3.4).

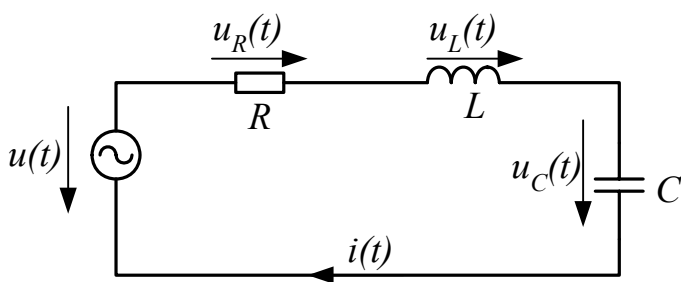


Рис. 3.3

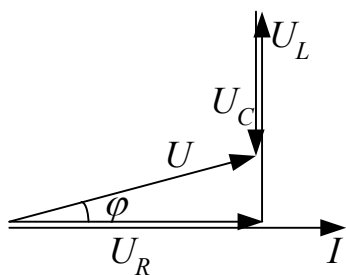


Рис. 3.4

Сопротивление R резистора называется активными сопротивлением. Индуктивное сопротивление и емкостное сопротивления называются реактивными сопротивлением. Реактивное сопротивление обозначается X , и для данной цепи (последовательное соединение катушки индуктивности и конденсатора) оно равно $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. Реактивное сопротивление может быть как положительным ($X_L > X_C$, нагрузка носит индуктивный характер), так и отрицательным ($X_L < X_C$, нагрузка носит емкостной характер). В случае емкостного характера нагрузки угол φ будет отрицательным. Полное сопротивление цепи обозначается Z , оно равно

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (1)$$

Полное сопротивление равно отношению действующего значения напряжения, приложенного к данному участку к действующему значению тока. Его смысл и способ получения выражения (1) делается понятным из треугольника сопротивлений (см. рис. 3.5), который подобен векторной диаграмме напряжений.

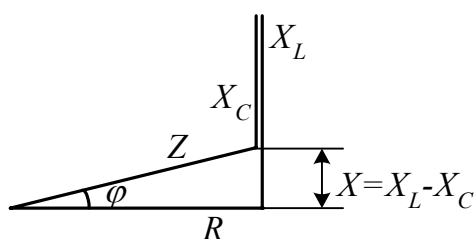


Рис. 3.5

Если известно действующее значение напряжения источника, частота и параметры элементов схемы R, L, C , можно найти силу тока, напряжение на всех элементах и φ сдвиг фаз между током и напряжением.

$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ – действующее значение напряжения источника;

$X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление цепи;

$I = \frac{U}{Z}$ – действующее значение силы тока;

$\varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right) = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$ – сдвиг фаз между током и напряжением;

$U_L = \omega L \cdot I$ – действующее значение напряжения на катушке индуктивности;

$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I$ – действующее значение напряжения на конденсаторе;

$U_R = R \cdot I$ – действующее значение напряжения на резисторе.

Исходя из вышеуказанных соображений, можно записать выражение для мгновенных значений тока и напряжений цепи.

$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t)$; $u_R(t) = U_R\sqrt{2} \sin(\omega t)$; $u_L(t) = U_L\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$;

$u_C(t) = U_C\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$; $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$.

Пример 2. В цепи, изображенной на рис. 3.6, действующее значение напряжения на источнике $U = 220$ В, частота $f = 50$ Гц, Параметры элементов: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 150$ Ом, $L_1 = 100$ мГн, $L_2 = 50$ мГн, $C = 20$ мкФ. Найти мгновенные значения тока и напряжения на элементах схемы.

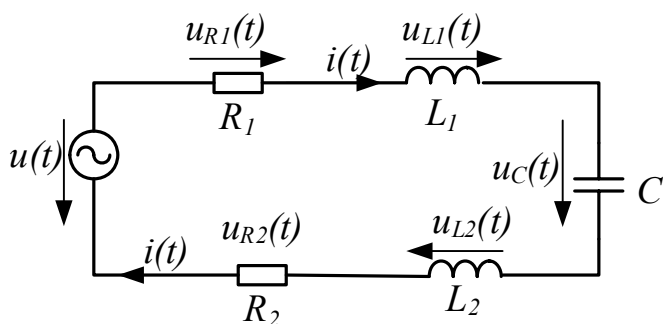


Рис. 3.6

Решение. Угловая частота равна $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314,1$ рад/с. Найдем реактивные сопротивления:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314,1 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 31,4 \text{ Ом}$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 314,1 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 15,7 \text{ Ом}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314,1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 159,2 \text{ Ом}$$

Активное сопротивление всей цепи равно $R = R_1 + R_2 = 100 + 150 = 250$ Ом.

Индуктивное сопротивление цепи при последовательном соединении индуктивных элементов (аналогично для емкостных элементов) равно

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} = 31,4 + 15,7 = 47,1 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление цепи равно $X = X_L - X_C = 47,1 - 159,1 = -112,0$ Ом. Реактивное сопротивление отрицательно, следовательно, нагрузка носит емкостной характер. Полное

сопротивление равно $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{250^2 + 112^2} = 274,0$ Ом.

Действующее значение тока равно $I = \frac{U}{Z} = 0,803$ А. Сдвиг фаз между током

и напряжением равен: $\varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right) = \arctg\left(\frac{-112}{250}\right) = -24,1^\circ = -0,421$ рад.

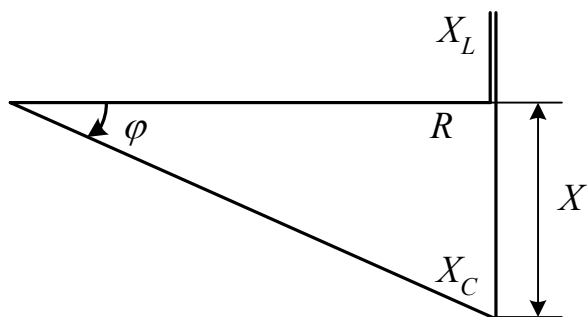


Рис. 3.7. Треугольник сопротивлений для примера 2

Мгновенные значения силы тока и напряжений на элементах схемы равны:

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t) = 1,136 \cdot \sin(314,1 \cdot t);$$

$$u_{R1}(t) = IR_1 \sqrt{2} \sin(\omega t) = 113,6 \cdot \sin(314,1 \cdot t);$$

$$u_{R2}(t) = IR_2 \sqrt{2} \sin(\omega t) = 170,3 \cdot \sin(314,1 \cdot t);$$

$$u_{L1}(t) = I \cdot \omega L_1 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 35,7 \sin\left(314,1t + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$u_{L2}(t) = I \cdot \omega L_2 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 17,8 \sin\left(314,1t + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$u_C(t) = \frac{I}{\omega C} \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 180,6 \sin\left(314,1t - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$u(t) = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = 311,1 \sin(314,1t - 0,421).$$

3.3. Участок цепи синусоидального тока с параллельным соединением элементов

Рассмотрим цепь, в которой все элементы нагрузки подсоединены к источнику параллельно (рис. 3.8). В этом случае удобно использовать понятие проводимости элементов:

$$G = \frac{1}{R} \text{ — активная проводимость;}$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} \text{ — индуктивная проводимость;}$$

$$B_C = \omega C \text{ — емкостная проводимость;}$$

$$B = B_L - B_C \text{ — реактивная проводимость;}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \text{ — полная}$$

проводимость.

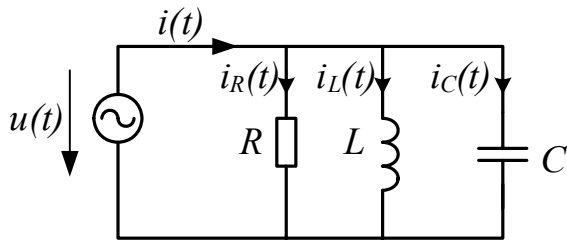


Рис. 3.8

Для параллельного соединения строят векторную диаграмму токов. Напряжение на источнике равно напряжению на всех элементах схемы, поэтому его начальную фазу удобно принять за ноль. Для того чтобы вычислить ток в ветви источника, нужно вычислить токи всех ветвей, а затем использовать первый закон Кирхгофа.

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t);$$

Пусть напряжение источника равно $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Мгновенные значения тока можно вычислить следующим образом (табл. 4):

$$i_R(t) = GU_m \sin(\omega t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t);$$

$$i_L(t) = B_L U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$i_C(t) = B_C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

Сдвиг фаз определяется в соответствии с табл. 4. Напряжение на катушке индуктивности по фазе опережает ток на $\frac{\pi}{2}$, а на конденсаторе отстает на $\frac{\pi}{2}$.

Действующие значения тока будут равны: $I_R = GU$; $I_L = B_L U$, $I_C = B_C U$, где $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ — действующее значение напряжения.

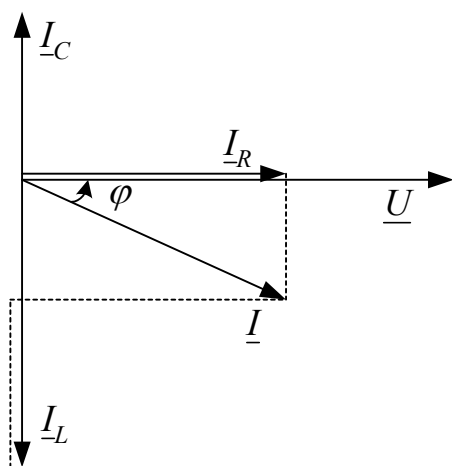


Рис. 3.9

Сила тока в ветви источника будет равна:

$i(t) = YU_m \sin(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \arctg\left(\frac{B}{G}\right) = \arctg\left(\frac{B_L - B_C}{G}\right)$ – сдвиг фаз между током и напряжением.

4. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

4.1. Комплексные числа

Символический метод расчета цепей синусоидального тока заключается в использовании комплексных чисел для обозначения токов, напряжений и сопротивлений. Приведем здесь в качестве справочного материала основные формулы из теории комплексных чисел, которые будут нам необходимы для решения задач символическим методом.

Любое комплексное число \underline{Z} может быть графически представлено в виде точки на комплексной плоскости (рис. 4.1).

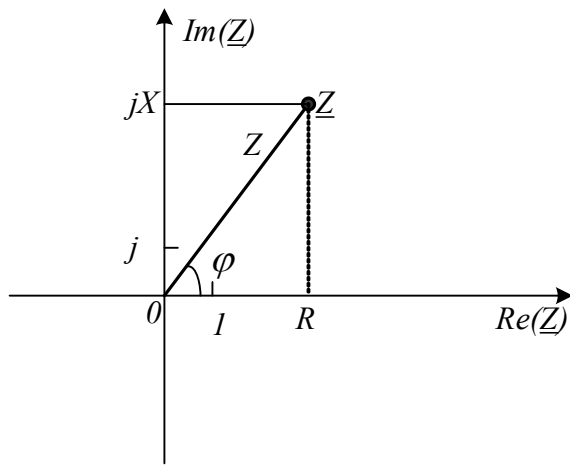


Рис. 4.1

Каждое комплексное число может быть определено двумя действительными числами – координатами, называемыми действительной и мнимой частью числа. Единичный орт по оси ординат равен мнимой единице j . Известно соотношение $j = \sqrt{-1}$, следовательно, $j^2 = -1$.

Возьмем для примера комплексное число $\underline{Z} = R + jX$, показанное на рис. 4.1. Число R называется действительной частью комплексного числа \underline{Z} и обозначается: $R = \text{Re}(\underline{Z})$, число X называется мнимой частью комплексного числа \underline{Z} и обозначается: $X = \text{Im}(\underline{Z})$. Запись $\underline{Z} = R + jX$ называется *комплексной формой* представления числа \underline{Z} .

Существует также *показательная форма* записи числа $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$. Здесь Z без черты, это $Z = |\underline{Z}|$ – модуль комплексного числа, графический смысл его – это расстояние между началом координат и точкой, соответствующей комплексному числу \underline{Z} . φ – аргумент числа \underline{Z} , число равное углу (в радианах) между отрезком, соединяющим начало координат с точкой \underline{Z} , и действительной осью. Из комплексной формы записи переходят к показательной следующим образом:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{X}{R}, & R \geq 0; \\ \pi + \arctg \frac{X}{R}, & R < 0. \end{cases}$$

Обратно – от показательной к комплексной форме записи при помощи следующих формул:

$$R = Z \cos(\varphi), \quad X = Z \sin(\varphi).$$

С комплексными числами производят различные математические действия, так же, как и с действительными. При сложении и вычитании удобно использовать комплексную форму записи числа. При этом действительные части складываются (или вычитаются) с действительными, а мнимые с мнимыми, например:

$$\underline{z}_1 = 5 + 3j, \quad \underline{z}_2 = 7 - 2j, \quad \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 5 + 3j + 7 - 2j = 12 + j.$$

При умножении, делении и возведении в степень удобно использовать показательную форму записи комплексных чисел, например:

$$\underline{z}_1 = 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad \underline{z}_2 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}, \quad \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = 5 \cdot 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3} + j\frac{\pi}{6}} = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{5}{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{3} - j\frac{\pi}{6}} = 2,5 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

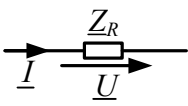
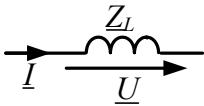
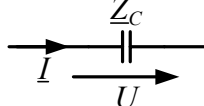
Для комплексных чисел определена операция комплексного сопряжения. Число комплексно сопряженное числу $\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$, обозначается \underline{Z}^* , по определению:

$$\underline{Z}^* = R - jX = Ze^{-j\varphi}.$$

4.2. Комплексное сопротивление

Участок цепи синусоидального тока, не содержащий источников электрической энергии, может быть представлен на схеме замещения комплексным сопротивлением \underline{Z} . Действительная часть комплексного сопротивления является активным сопротивлением участка цепи, а мнимая часть – реактивным сопротивлением. Вычисляется данное сопротивление по аналогии с сопротивлениями в цепях постоянного тока исходя из типа соединений между элементами. Комплексное сопротивление каждого элемента приводится в табл. 5.

Таблица 5

		
$\underline{Z}_R = R = R \cdot e^{j0}$	$\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Пример 3. Вычислить комплексное сопротивление участка цепи синусоидального тока (рис. 4.2), в которой действует источник с частотой $f=1$ кГц. Параметры элементов схемы: $R=150$ Ом, $L=50$ мГн, $C=3$ мкФ.

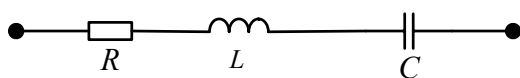


Рис. 4.2

Решение. На данном участке цепи все элементы соединены последовательно. Значит, комплексное сопротивление этого участка будет равно сумме комплексных сопротивлений элементов. $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$.

Далее получим $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Мы использовали здесь соотношение $\frac{1}{j} = -j$. Угловая частота $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,142 \cdot 10^3 = 6,283 \cdot 10^3$ рад/с.

Подставив остальные данные, получим окончательное значение выражения:

$$\underline{Z} = 150 + j\left(6283 \cdot 50 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{6283 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}\right) = 150 + j261,1 \text{ Ом.}$$

Пример 4. Вычислить комплексное сопротивление участка цепи синусоидального тока (рис. 4.3), в которой действует источник с частотой $f=5$ кГц. Параметры элементов схемы: $R_1=1$ кОм, $R_2=0,5$ кОм, $L=0,5$ мГн, $C_1=0,3$ мкФ, $C_2=1$ мкФ, $C_3=1,5$ мкФ

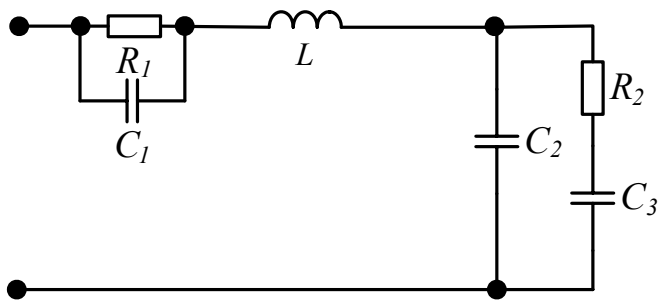


Рис. 4.3

Решение. Данную цепь можно представить в виде последовательного соединения трех участков (рис. 4.4).

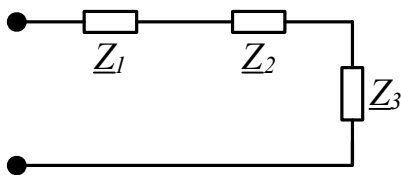


Рис. 4.4

Первый участок \underline{Z}_1 представляет собой параллельное соединение элементов R_1 и C_1 . Его комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{R1} \cdot \underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_{C1}} = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}.$$

Второй участок – это катушка индуктивности L , комплексное сопротивление которой

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L = j\omega L.$$

Третий участок представляет собой параллельное соединение конденсатора C_2 и ветви, содержащей R_2 и C_3 . Его сопротивление

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{C2}(\underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{C3})}{\underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{C3}} = \frac{\frac{1}{j\omega C_2} \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)}{\frac{1}{j\omega C_2} + R_2 + \frac{1}{j\omega C_3}}$$

Общее сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3.$$

Подставим теперь численные значения.

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}}{1 \cdot 10^3 + \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= \frac{1 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}}{1 \cdot 10^3 + \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}} = \frac{-j \cdot 10^3 \cdot 106,1}{1 \cdot 10^3 - j \cdot 106,1}.$$

Мы использовали соотношение $\frac{1}{j} = -j$. Теперь, чтобы перейти к комплексной форме числа, домножим и числитель и знаменатель на значение, комплексно сопряженное знаменателю. Получим окончательное выражение

$$\underline{Z}_1 = \frac{-j \cdot 10^3 \cdot 106,1}{1 \cdot 10^3 - j \cdot 106,1} = \frac{-j \cdot 10^3 \cdot 106,1 (1 \cdot 10^3 + j \cdot 106,1)}{(1 \cdot 10^3 - j \cdot 106,1)(1 \cdot 10^3 + j \cdot 106,1)} =$$

$$= \frac{-j \cdot 10^6 \cdot 106,1 + 106,1^2 \cdot 10^3}{(1 \cdot 10^3)^2 + (106,1)^2} = 11,13 - j104,9 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = j\omega L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = j15,7 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\frac{1}{j\omega C_2} \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_3} \right)}{\frac{1}{j\omega C_2} + R_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \left(500 + \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}} \right)}{\frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} + 500 + \frac{1}{j2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= \frac{-31,83j(500 - 21,22j)}{-31,83j + 500 - 21,22j} = \frac{-675,4 - 1,592 \cdot 10^4}{500 - 53,05j}.$$

Так же, как и в случае с \underline{Z}_1 , домножаем на комплексно сопряженное знаменателю. Получаем

$$\underline{Z}_3 = \frac{(-675,4 - 1,592 \cdot 10^4)(500 + 53,05j)}{(500 - 53,05j)(500 + 53,05j)} = \frac{5,069 \cdot 10^5 - 7,996 \cdot 10^6 j}{500^2 + 53,05^2} =$$

$$= \frac{5,069 \cdot 10^5 - 7,996 \cdot 10^6 j}{2,528 \cdot 10^5} = 2,004 - 31,62j \text{ Ом.}$$

И, наконец, общее сопротивление

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 11,13 - j104,9 + j15,7 + 2,00 - j31,62 = 13,13 - j120,82 \text{ Ом.}$$

4.3. Комплексы токов и напряжений

Пусть имеется некоторый участок цепи. Мгновенные значения токов и напряжений на этом участке равны соответственно:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Согласно формулам перехода от показательной формы записи комплексного числа к комплексной форме (см. п. 4.1), можно показать, что синус какого-либо аргумента является мнимой частью комплексного числа, имеющего данный аргумент, или, иначе говоря, является проекцией комплексного числа на мнимую ось. Исходя из этого, можно обобщить мгновенное значение токов и напряжений до комплексного числа, считая, что физический смысл имеет их проекция на мнимую ось (или любую другую прямую, проходящую через начало координат на комплексной плоскости). Таким образом, определяется понятие комплексного мгновенного значения тока и напряжения, они обозначаются строчными латинскими буквами с чертой:

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}, \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}(\underline{i}(t)),$$

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}, \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = \text{Im}(\underline{u}(t)).$$

Определим понятие комплексных амплитуд тока и напряжения.

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \underline{I_m} e^{j\omega t},$$

$$\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} = \underline{U_m} e^{j\omega t}.$$

Комплексные амплитуды отличаются при обозначении от обычных амплитуд чертой снизу.

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$$

Комплексные амплитуды тока и напряжения представляют собой комплексные числа, модуль которых равен амплитуде тока или напряжения и аргумент которых равен начальной фазе тока или напряжения.

Комплексы тока или напряжения – это комплексные действующие значения тока или напряжения, они отличаются по модулю от комплексных амплитуд в $\sqrt{2}$ раз (аргументы совпадают).

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}$$

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u}$$

Зная комплекс тока или напряжения, можно записать мгновенное значение, и наоборот. Комплексы токов и напряжений используются при расчете цепей. Выражения для мгновенных значений дают возможность определить реальное значение тока или напряжения в любой момент времени.

Пример 5. Комплекс тока в некоторой ветви электрической цепи синусоидального тока с частотой 50 Гц $\underline{I} = 1,23 - j2,45$ А. Найти выражение для мгновенного значения тока.

Решение. Общее выражение для мгновенного значения тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Найдем численное выражение каждой величины, входящей в него. Угловая частота $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314$ рад/с.

Амплитуда $I_m = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot |\underline{I}|$, в свою очередь,

$$|\underline{I}| = \sqrt{1,23^2 + 2,45^2} = 2,74 \text{ А.} \quad \text{Тогда} \quad I_m = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot 2,74 = 3,88 \text{ А.}$$

Начальная фаза определяется следующим образом:

$$\psi_i = \arctg\left(\frac{-2,45}{1,23}\right) = -1,106 \text{ рад. Это соответствует примерно } -63^\circ. \text{ Теперь}$$

мы можем записать окончательное выражение для мгновенного значения тока $i(t) = 3,88 \sin(314t - 1,106)$ А.

Пример 6. Мгновенное значение напряжения на некотором участке цепи $u(t) = 311 \cdot \sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)$ В. Найти комплекс этого напряжения.

Решение. Для того чтобы найти комплекс напряжения, необходимо знать его действующее значение и начальную фазу. Действующее значение

находится из амплитуды. $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220$ В. Тогда комплекс

напряжения будет $\underline{U} = U \cdot e^{j\psi_u} = 220 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 220 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot 220 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$$= 220 \frac{1}{2} + j \cdot 220 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 110 + j190,5 \text{ В.}$$

4.4. Законы электрических цепей в комплексной форме

Символический метод расчета электрических цепей синусоидального тока заключается в том, что параметры цепей – токи и напряжения представляются в виде комплексов токов и напряжений, а пассивные элементы заменяются эквивалентными комплексными сопротивлениями, как было показано выше. Для комплексов токов и напряжений справедливы законы электрических цепей (законы Ома и Кирхгофа) при замене понятий токов, напряжений и сопротивлений их комплексными аналогами. Кроме того, можно использовать все методы расчета линейных электрических цепей: метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного источника и т.д.

Зная мгновенные значения параметров источников, можно вычислить комплексы ЭДС и токов.

Пример 7. Параметры схемы, изображенной на рис. 4.5: $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = 80$ Ом, $R_3 = 50$ Ом, $L_1 = 25$ мГн, $L_2 = 35$ мГн, $L_3 = 10$ мГн, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 50$ мкФ. Параметры синусоидальных источников ЭДС

следующие: частота $f = 150$ Гц, действующие значения – $E_1 = 220$ В, $E_2 = 120$ В, начальные фазы – $\psi_1 = \frac{\pi}{6}$ рад, $\psi_2 = -\frac{\pi}{2}$ рад. Рассчитать мгновенные значения токов во всех ветвях.

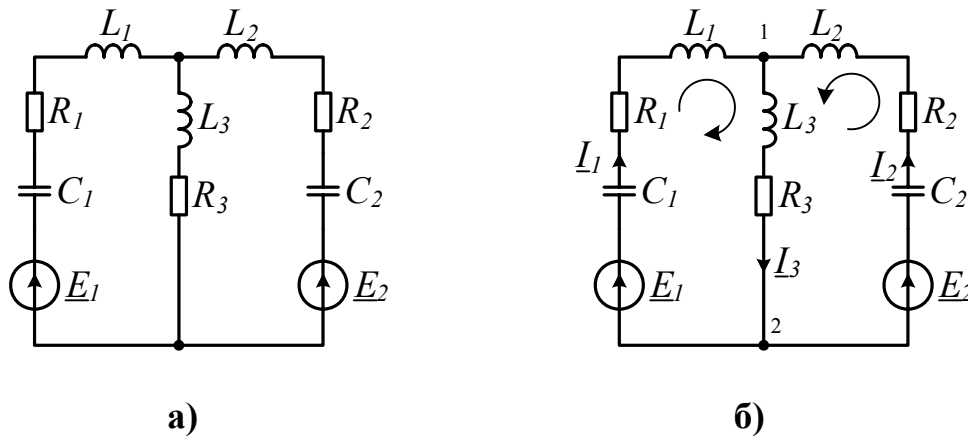


Рис. 4.5

Решение. Решим данную задачу символическим методом. Для этого представим токи, напряжения и сопротивления всех ветвей комплексными числами. Комплексы ЭДС в соответствии с условием будут следующими:

$$\underline{E}_1 = E_1 e^{j\psi_1} = 220 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 190,5 + j \cdot 110 \text{ В},$$

$$\underline{E}_2 = E_2 e^{j\psi_2} = 120 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \cdot 120 \text{ В}.$$

Угловая частота будет $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 = 942$ рад/сек.

В данной схеме три ветви и два узла (см. рис. 4.5 б). Вычислим комплексные сопротивления ветвей.

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 45 + j \cdot 942 \cdot 25 \cdot 10^{-3} - j \frac{1}{942 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 45 - j \cdot 29,5 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = 80 + j \cdot 942 \cdot 35 \cdot 10^{-3} - j \cdot \frac{1}{942 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 80 + j \cdot 11,8 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = 50 + j \cdot 942 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 50 + j \cdot 9,4 \text{ Ом}.$$

Составим уравнения по законам Кирхгофа для данной цепи в комплексной форме. Уравнения составляются относительно неизвестных комплексов токов. Поскольку мы имеем два узла и три ветви, можно составить одно уравнение по первому закону Кирхгофа и два – по второму (количество независимых контуров $n = b - y + 1$, где b – количество ветвей, y – количество узлов). Выберем независимые контуры и направление их обхода так, как показано на рис.4.5 б.

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа относительно комплексных токов ветвей.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3;$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = \underline{E}_1;$$

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = \underline{E}_2.$$

Выразим из первого уравнения ток \underline{I}_3 , подставим его в остальные уравнения, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными токами \underline{I}_1 и \underline{I}_2 .

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{E}_1;$$

$$(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 = \underline{E}_2.$$

В матричном виде система может быть записана следующим образом:

$$\underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{E}, \text{ где } \underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов, } \underline{I} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

– вектор столбец неизвестных, $\underline{E} = \begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \end{pmatrix}$ – вектор столбец свободных членов.

Решим эту систему. Определитель матрицы коэффициентов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{Z}_3^2 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_2 =$$

$$= (45 - j29,5)(80 + j11,8) + (45 - j29,5)(50 + j9,4) + (50 + j9,4)(80 + j11,8) =$$

$$\begin{aligned}
&= (45 \cdot 80 - j29,5 \cdot 80 + j11,8 \cdot 45 + 29,5 \cdot 11,8) + \\
&+ (45 \cdot 50 - j29,5 \cdot 50 + j9,4 \cdot 45 + 9,4 \cdot 29,5) + \\
&+ (50 \cdot 80 + j9,4 \cdot 80 + j11,8 \cdot 50 - 11,8 \cdot 9,4) = \\
&= (3600 - j2360 + j531 + 348,1) + \\
&+ (2250 - j1475 + j423 + 277,3) + \\
&+ (4000 + j752 + j590 - 110,9) = \\
&= 10364,5 - j1539 \text{ Ом}^2.
\end{aligned}$$

При раскрытии скобок учитывали, что $j \cdot j = -1$.

Переведем результат в показательную форму:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 10364,5 - j1539 = \sqrt{10364,5^2 + 1539^2} \cdot e^{-j \arctg \frac{1539}{10364,5}} = \\
&= 10478,1 \cdot e^{-j \cdot 0,147} \text{ Ом}^2.
\end{aligned}$$

Для решения системы уравнений необходимо вычислить определители матриц, которые получаются из матрицы коэффициентов заменой столбца, соответствующего искомому току вектором свободных членов. Вычислим их.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} \underline{E}_1 & \underline{Z}_3 \\ \underline{E}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{vmatrix} = \underline{E}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) - \underline{Z}_3 \underline{E}_2 = \\
&= (190,5 + j110)(80 + j11,8 + 50 + j9,4) - (50 + j9,4)(-j \cdot 120) = \\
&= (190,5 + j110)(130 + j21,2) - (50 + j9,4)(-j \cdot 120) = \\
&= (190,5 \cdot 130 + j110 \cdot 130 + j21,2 \cdot 190,5 - 110 \cdot 21,2) + j50 \cdot 120 - 120 \cdot 9,4 = \\
&= (24765 + j14300 + j4038,6 - 2332) + j6000 - 1128 = 21305 + j24338,6 = \\
&= \sqrt{21305^2 + 24338,6^2} e^{j \arctg \left(\frac{24338,6}{21305} \right)} = 32346,1 \cdot e^{j \cdot 0,851} \text{ В} \cdot \text{Ом};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & \underline{E}_1 \\ \underline{Z}_3 & \underline{E}_2 \end{vmatrix} = \underline{E}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \underline{Z}_3 \underline{E}_1 = \\
&= -j \cdot 120(45 - j29,5 + 50 + j9,4) - (50 + j9,4)(190,5 + j110) = \\
&= -j \cdot 120(95 - j20,1) - (50 \cdot 190,5 + j9,4 \cdot 190,5 + 50 \cdot j110 - 9,4 \cdot 110) = \\
&= -j \cdot 120 \cdot 95 + 120 \cdot 20,1 - 50 \cdot 190,5 - j9,4 \cdot 190,5 - 50 \cdot j110 + 9,4 \cdot 110 = \\
&= -j \cdot 11400 - 2412 - 9525 - j1790,7 - j5500 + 1034 =
\end{aligned}$$

$$= -10903 - j \cdot 18690,7 = \sqrt{10903^2 + 18690,7^2} e^{j(\pi + \arctg(18690,7/10903))} =$$

$$21638,3 \cdot e^{j \cdot 4,184} \text{ В} \cdot \text{Ом}.$$

Теперь, вычислив необходимые определители, найдем комплексы токов:

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{32346,1 \cdot e^{j \cdot 0,851}}{10478,1 \cdot e^{-j \cdot 0,147}} = \frac{32346,1}{10478,1} e^{j \cdot (0,851 + 0,147)} = 3,087 e^{j \cdot 0,998} \text{ А},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{21638,3 \cdot e^{j \cdot 4,184}}{10478,1 \cdot e^{-j \cdot 0,147}} = \frac{21638,3}{10478,1} e^{j \cdot (4,184 + 0,147)} = 2,065 \cdot e^{j \cdot 4,331} \text{ А}.$$

Для того чтобы найти ток \underline{I}_3 , переведем выражения для токов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 из показательной формы в комплексную.

$$\underline{I}_1 = 3,087 e^{j \cdot 0,998} = 3,087 \cos(0,998) + j \cdot 3,087 \sin(0,998) = 1,671 + j 2,596 \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = 2,065 \cdot e^{j \cdot 4,331} = 2,065 \cos(4,331) + j \cdot 2,065 \sin(4,331) = -0,767 - j 1,918 \text{ А}.$$

Теперь можно найти ток \underline{I}_3 .

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,671 + j 2,596 - 0,767 - j 1,918 = 0,904 + j 0,678 \text{ А},$$

$$\underline{I}_3 = 0,904 + j 0,678 = \sqrt{0,904^2 + 0,678^2} e^{j \arctg\left(\frac{0,678}{0,904}\right)} = 1,13 e^{j 0,644} \text{ А}.$$

Зная комплексы токов, легко можно получить выражения для мгновенных значений. Начальные фазы нам известны – это аргументы комплексов токов. Амплитуды равны действующим значениям, умноженным на $\sqrt{2}$. В свою очередь, действующие значения токов – это модули их комплексов. Получим окончательные выражения для мгновенных значений токов.

$$i_1(t) = \sqrt{2} |\underline{I}_1| \sin(\omega t + \arg(\underline{I}_1)) = \sqrt{2} \cdot 3,087 \sin(314t + 0,998) =$$

$$= 4,366 \sin(314t + 0,998) \text{ А};$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} |\underline{I}_2| \sin(\omega t + \arg(\underline{I}_2)) = \sqrt{2} \cdot 2,065 \sin(314t + 4,331) =$$

$$= 2,92 \sin(314t + 4,331) \text{ А};$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} |\underline{I}_3| \sin(\omega t + \arg(\underline{I}_2)) = \sqrt{2} \cdot 1,13 \sin(314t + 0,644) =$$

$$= 1,598 \sin(314t + 0,644) \text{ А}.$$

Пример 8. Параметры элементов цепи, изображенной на рис. 4.6 а: $R_1 = 55 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 60 \text{ Ом}$, $L_1 = 125 \text{ мГн}$, $L_2 = 150 \text{ мГн}$, $C_1 = 200 \text{ мкФ}$, $C_2 = 40 \text{ мкФ}$, $C_3 = 50 \text{ мкФ}$. К цепи приложено напряжение с действующим значением $U = 220 \text{ В}$, частота $f = 50 \text{ Гц}$. Рассчитать комплексы токов во всех ветвях.

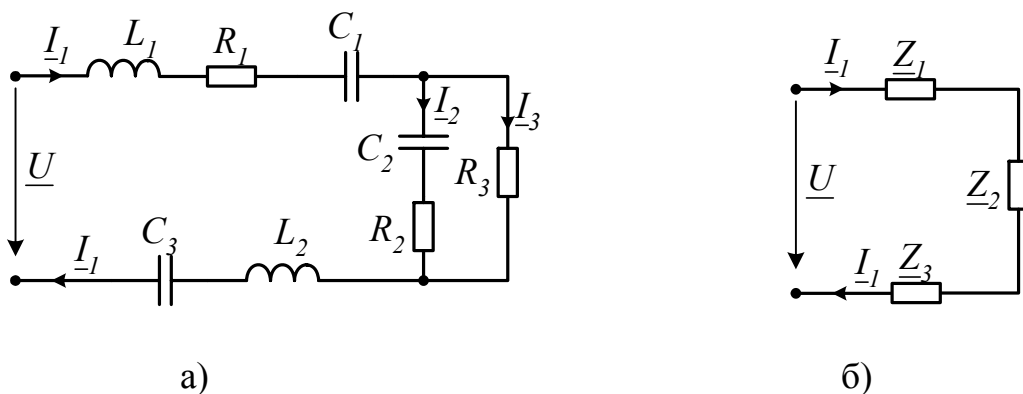


Рис. 4.6

Решение. Составим комплексную схему замещения для данной цепи рис. 4.6 б. Определим комплексные сопротивления участков этой схемы. В первый участок, замещаемый сопротивлением \underline{Z}_1 , входят последовательно соединенные элементы L_1 , R_1 , C_1 ; во второй – \underline{Z}_2 входит R_3 , соединенный параллельно с последовательным соединением R_2 и C_2 ; третий участок – это последовательное соединение L_2 и C_3 . Угловая частота $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/сек}$. В соответствии со всем этим получим:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 55 + j \cdot 314 \cdot 125 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{j314 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} =$$

$$(\text{используем соотношение } \frac{1}{j} = -j)$$

$$= 55 + j39,27 - j15,92 = 55 + j23,35 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_3 \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{R_3 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{60 \cdot \left(20 + \frac{1}{j314 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \right)}{60 + 20 + \frac{1}{j314 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= \frac{60 \cdot (20 \cdot j314 \cdot 40 \cdot 10^{-6} + 1)}{80 \cdot j314 \cdot 40 \cdot 10^{-6} + 1} = \frac{(60 + 15,08 \cdot j)}{(1 + 1,01 \cdot j)} =$$

(домножаем на комплексно сопряженное знаменателю)

$$= \frac{(60 + 15,08 \cdot j)(1 - 1,01 \cdot j)}{(1 + 1,01 \cdot j)(1 - 1,01 \cdot j)} = \frac{60 + 15,08 \cdot j - 60,6j + 15,23}{2,02} =$$

$$= 37,3 - 22,5 \cdot j \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_3} = j314 \cdot 150 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{j314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= j47,12 - j63,66 = -j16,54 \text{ Ом.}$$

Поскольку \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 и \underline{Z}_3 соединены последовательно, комплексное сопротивление всей схемы $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$,

$$\underline{Z} = 55 + j23,35 + 37,3 - j22,5 - j16,54 = 92,3 - j15,69 \text{ Ом.}$$

Переведем \underline{Z} в показательную форму

$$\underline{Z} = 92,3 - j15,69 = \sqrt{92,3^2 + 15,69^2} \cdot e^{-j \cdot \arctg\left(\frac{15,69}{92,3}\right)} = 93,7 e^{-j \cdot 0,168} \text{ Ом.}$$

Найдем комплекс общего тока $\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}}$.

$$\underline{I}_1 = \frac{220}{92,7 e^{-j0,168}} = 2,37 e^{j0,168} = 2,37 \cos(0,168) + j \sin(0,168) = 2,32 + j0,39 \text{ А.}$$

Для того чтобы найти остальные токи, вычислим напряжение на втором участке комплексной схемы замещения.

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1 \underline{Z}_2 = (2,32 + j0,39)(37,3 - j22,5) = 95,37 - j37,39 =$$

$$= \sqrt{95,37^2 + 37,39^2} e^{-j \arctg\left(\frac{37,39}{95,37}\right)} = 102,44 e^{-j0,374} \text{ В.}$$

Затем вычислим токи \underline{I}_2 и \underline{I}_3 .

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{102,44 e^{-j0,374}}{20 + \frac{1}{j314 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}} = \frac{102,44 e^{-j0,374}}{20 - j79,58} =$$

$$= \frac{102,44 e^{-j0,374}}{\sqrt{20^2 + 79,58^2} e^{-j \arctg\left(\frac{79,58}{20}\right)}} = \frac{102,44 e^{-j0,374}}{82,1 e^{-j1,325}} = \frac{102,44}{82,1} e^{j(-0,374+1,325)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{102,44}{82,1} e^{j(-0,374+1,325)} = 1,25 e^{j0,951} = 1,25 \cdot \cos(0,951) + j1,25 \cdot \sin(0,951) = \\
&= 0,73 + j1,02 \text{ A}; \\
I_3 &= \frac{U_2}{R_3} = \frac{102,44 e^{-j0,374}}{60} = 1,7 e^{-j0,374} = 1,7 \cos(0,347) - j \sin(0,347) = \\
&= 1,59 - j0,62 \text{ A}.
\end{aligned}$$

5. ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

Явление электромагнитной взаимной индукции заключается в наведении переменным током, протекающим через одну катушку индуктивности, ЭДС взаимной индукции в других, индуктивно связанных катушках. Переменный ток создает переменный поток вектора магнитной индукции, пронизывающий обмотки катушек индуктивности, расположенных близко друг к другу. Напряжение на катушке индуктивности определяется алгебраической суммой ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции. При этом знак слагаемого вклада в эту сумму взаимной индукции определяется взаимной направленностью потоков самоиндукции и взаимоиндукции. Для того чтобы выделить направление потока самоиндукции, на схемах замещения выделяется точкой один из зажимов каждой индуктивно связанной катушки таким образом, чтобы токи одинаково направленные относительно этих зажимов создавали одинаково направленные магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции. Выделенные зажимы носят название одноименных по отношению друг к другу. Если направления токов относительно одноименных зажимов одинаковые, имеет место согласное включение индуктивно связанных катушек, то есть потоки самоиндукции и взаимной индукции сонаправлены и складываются, если разное – то встречное включение, тогда потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены противоположно и вычитаются.

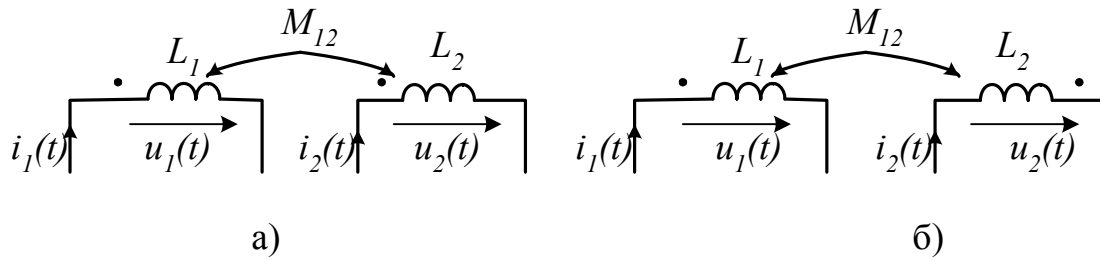


Рис. 5.1

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки L_1 и L_2 (см. рис. 5.1). Взаимное влияние индуктивно связанных катушек характеризуется коэффициентом взаимной индукции $k_{12} = k_{21}$. Это безразмерный коэффициент, может находиться в пределах от 0 до 1. Он зависит от отношения потока взаимной индукции к полному потоку. Кроме того, характеристикой взаимной индукции является взаимная индуктивность $M_{12} = M_{21}$ – величина, связанная с коэффициентом взаимной индукции следующим образом:

$$M_{12} = k_{12} \sqrt{L_1 L_2}.$$

Она измеряется, как и индуктивность, в генри (Гн). На рис. 5.1 а показано согласное включение индуктивно связанных катушек, так как токи одинаково направлены относительно одноименных зажимов, на рис. 5.1 б – встречное включение (относительно одноименных зажимов токи направлены по-разному). Связь между током и напряжением на показанных катушках выражается следующим образом для этих двух случаев (а и б):

$$\text{а) } u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{21} \frac{di_2(t)}{dt};$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_1(t)}{dt};$$

$$\text{б) } u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M_{21} \frac{di_2(t)}{dt};$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M_{12} \frac{di_1(t)}{dt}.$$

В цепи синусоидального тока с угловой частотой ω связь между комплексами токов и напряжений для согласного и встречного включения, соответственно, будет выражаться:

$$а) \quad \underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M_{21} \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M_{12} \underline{I}_1;$$

$$б) \quad \underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M_{21} \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M_{12} \underline{I}_1;$$

Пример 9. В цепи, рассмотренной в примере 7, учтем наличие взаимной индукции между катушками индуктивности. Одноименные зажимы расположены так, как показано на рис. 5.2. Коэффициенты взаимной индукции равны $k_{12} = 0,7$, $k_{23} = 0,8$, $k_{31} = 0,5$. Найти комплексы токов в ветвях.

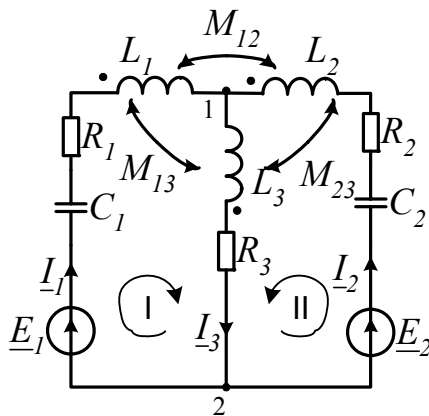


Рис. 5.2

Решение. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа в комплексной форме. В цепи два узла и три ветви, значит можно использовать одно уравнение для первого закона Кирхгофа и выбрать два независимых контура для составления уравнений по второму закону Кирхгофа. Контур и направление обхода выберем, как показано на рис. 5.2. Система уравнений будет следующей:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3;$$

$$\underline{I}_1 \cdot \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) + \underline{U}_{L1} + \underline{I}_3 \cdot R_3 + \underline{U}_{L3} = \underline{E}_1;$$

$$\underline{I}_2 \cdot \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \underline{U}_{L2} + \underline{I}_3 \cdot R_3 + \underline{U}_{L3} = \underline{E}_2.$$

Здесь \underline{U}_{L1} , \underline{U}_{L2} и \underline{U}_{L3} комплексы напряжений на катушках индуктивности L_1 , L_2 и L_3 соответственно. В данном случае мы должны уделить им особое внимание. Рассмотрим расположение одноименных зажимов. Ток \underline{I}_1 втекает в него (в зажим, помеченный точкой), а токи \underline{I}_2 и \underline{I}_3 вытекают. Поэтому получается, что катушки L_2 и L_3 включены согласно, а L_1 и L_2 – встречно, L_3 и L_1 – тоже встречно. Когда токи текут *одинаково* относительно одноименных зажимов, включение согласное, когда по-разному – встречное. При согласном включении вклад взаимной индукции положителен, при встречном – отрицателен. Выпишем выражения для напряжений на катушках индуктивности.

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I}_1 j\omega L_1 - \underline{I}_2 j\omega M_{12} - \underline{I}_3 j\omega M_{31};$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{I}_2 j\omega L_2 - \underline{I}_1 j\omega M_{12} + \underline{I}_3 j\omega M_{23};$$

$$\underline{U}_{L3} = \underline{I}_3 j\omega L_3 - \underline{I}_1 j\omega M_{31} + \underline{I}_2 j\omega M_{23}.$$

Теперь подставим численные значения и вычислим комплексные сопротивления и все коэффициенты нашей системы уравнений.

$$j\omega L_1 = j2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = j23,56 \text{ Ом},$$

$$j\omega L_2 = j2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 35 \cdot 10^{-3} = j32,99 \text{ Ом},$$

$$j\omega L_3 = j2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j9,43 \text{ Ом},$$

$$R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 45 + \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 45 - j53,05 \text{ Ом},$$

$$R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = 45 + \frac{1}{j2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 80 - j21,22 \text{ Ом},$$

$$j\omega M_{12} = j\omega \cdot k_{12} \sqrt{L_1 L_2} = j \cdot 2\pi \cdot 150 \cdot 0,7 \cdot \sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 35 \cdot 10^{-3}} = j19,52 \text{ Ом},$$

$$j\omega M_{23} = j\omega \cdot k_{23} \sqrt{L_2 L_3} = j \cdot 2\pi \cdot 150 \cdot 0,8 \cdot \sqrt{35 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = j14,1 \text{ Ом},$$

$$j\omega M_{31} = j\omega \cdot k_{31} \sqrt{L_3 L_1} = j \cdot 2\pi \cdot 150 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = j7,45 \text{ Ом}.$$

Подставим числа в выражения для напряжений на катушках индуктивности.

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I}_1 j23,56 - \underline{I}_2 j19,52 - \underline{I}_3 j7,45;$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{I}_2 j32,99 - \underline{I}_2 j19,52 + \underline{I}_3 j14,1;$$

$$\underline{U}_{L3} = \underline{I}_3 j9,43 - \underline{I}_1 j7,45 + \underline{I}_2 j14,1.$$

А теперь все это подставим в систему уравнений для определения комплексов токов.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3;$$

$$\underline{I}_1 \cdot (45 - j53,05) + \underline{I}_1 j23,56 - \underline{I}_2 j19,52 - \underline{I}_3 j7,45 + \underline{I}_3 \cdot 50 + \underline{I}_3 j9,43 - \underline{I}_1 j7,45 + \underline{I}_2 j14,1 = 190,53 + j110;$$

$$\underline{I}_2 \cdot (80 - j21,22) + \underline{I}_2 j32,99 - \underline{I}_2 j19,52 + \underline{I}_3 j14,1 + \underline{I}_3 \cdot 50 + \underline{I}_3 j9,43 - \underline{I}_1 j7,45 + \underline{I}_2 j14,1 = -j120$$

Выразим из первого уравнения ток \underline{I}_3 и подставим его значение в остальные уравнения, одновременно упрощая их. Получим систему двух уравнений относительно двух неизвестных токов.

$$\underline{I}_1(95 - j35) + \underline{I}_2(50 - j3,43) = 190,53 + j110;$$

$$\underline{I}_1(50 - j3,43) + \underline{I}_2(130 + j49,36) = -j120.$$

Решим эту систему. Определитель матрицы коэффициентов системы равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 95 - j35 & 50 - j3,43 \\ 50 - j3,43 & 130 + j49,36 \end{vmatrix} =$$

$$= (95 - j35)(130 + j49,36) - (50 - j3,43)^2 = 11589 + j483 \text{ Ом}^2.$$

Далее вычислим определители Δ_1 и Δ_2 матриц, получающихся из матрицы коэффициентов заменой первого и второго столбца, соответственно вектором свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 190,53 + j110 & 50 - j3,43 \\ -j120 & 130 + j49,36 \end{vmatrix} = 19750 + j29704 \text{ В} \cdot \text{Ом};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 95 - j35 & 190 + j110 \\ 50 - j3,43 & -j120 \end{vmatrix} = -14104 + j16246 \text{ В} \cdot \text{Ом}.$$

Вычислим теперь значения токов

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{19750 + j29704}{11589 + j483} = \frac{(19750 + j29704)(11589 - j483)}{(11589 + j483)(11589 - j483)} = \\
 &= \frac{(19750 + j29704)(11589 - j483)}{(11589^2 + 483^2)} = \\
 &= \frac{(19750 \cdot 11589 + j29704 \cdot 11589 - 19750 \cdot j483 - j29704 \cdot j483)}{(11589^2 + 483^2)} = \\
 &= \frac{(228882750 + j344239656 - j9539250 + 14347032)}{134538210} = \\
 &= \frac{(243229782 + j334700406)}{134538210} = \frac{243229782}{134538210} + j \frac{334700406}{134538210} = \\
 &= 1,808 + j2,488 \text{ А.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14104 - j16246}{11589 + j483} = \frac{(-14104 - j16246)(11589 - j483)}{(11589 + j483)(11589 - j483)} = \\
 &= \frac{(-14104 - j16246)(11589 - j483)}{(11589^2 + 483^2)} = \\
 &= \frac{(-14104 \cdot 11589 - j16246 \cdot 11589 + 14104 \cdot j483 + j16246 \cdot j483)}{(11589^2 + 483^2)} = \\
 &= \frac{(-163451256 - j188274894 + j6812232 - 7846818)}{134538210} = \\
 &= \frac{(-171298074 - j181462662)}{134538210} = \frac{-171298074}{134538210} - j \frac{181462662}{134538210} = \\
 &= -1,273 - j1,349 \text{ А.}
 \end{aligned}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,808 + j2,488 - 1,273 - j1,349 = 0,535 + j1,139 \text{ А.}$$

Пример 10. В цепи, изображенной на рис. 5.3, рассчитать комплексы токов во всех ветвях и напряжений на всех элементах. Параметры элементов схемы: $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 7 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$, $L_1 = 20 \text{ мГн}$, $L_2 = 50 \text{ мГн}$, $L_3 = 10 \text{ мГн}$. Параметры источника: частота $f = 50 \text{ Гц}$, действующее значение $U_1 = 220 \text{ В}$. Коэффициенты взаимной индукции: $k_{12} = 0,7$, $k_{13} = 0,9$, $k_{23} = 0,5$. Получить мгновенные значения токов во всех обмотках.

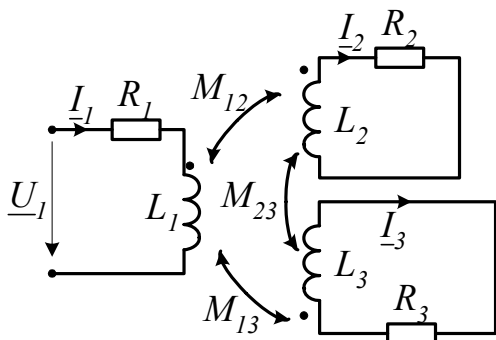


Рис. 5.3

Решение. Данная схема (рис. 5.3) является схемой замещения трехобмоточного трансформатора. Три контура, показанные на рис. 5.3, не имеют гальванической связи и связаны только посредством взаимной индукции. Токи во втором и третьем контурах вызываются только ЭДС взаимной индукции на L_2 и L_3 . Рассчитаем их, используя второй закон Кирхгофа для всех трех контуров. При составлении уравнений учтем, что напряжение на каждой катушке индуктивности равно сумме трех слагаемых, вызванных потоками магнитной индукции: самоиндукции и взаимной индукции с двумя соседними катушками индуктивности. Направления обхода контуров выберем по часовой стрелке, одинаково во всех контурах. В соответствии с заданным направлением токов, катушки L_1 и L_2 а также L_2 и L_3 включены в цепь встречно, а L_1 и L_3 согласно. Иными словами, ток в катушке L_2 вытекает из одноименного зажима, а в L_1 и L_3 втекает в одноименный зажим. Поэтому L_2 соединена с обеими катушками L_1 и L_3 встречно, а они между собой согласно. Следовательно, перед взаимными индуктивностями M_{12} и M_{23} в уравнениях ставится знак минус, а перед M_{13} – плюс. Получается система уравнений относительно комплексов токов:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \underline{I}_2 \cdot j\omega M_{12} + \underline{I}_3 \cdot j\omega M_{13};$$

$$0 = \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \underline{I}_1 \cdot j\omega M_{12} - \underline{I}_3 \cdot j\omega M_{23};$$

$$0 = \underline{I}_3(R_3 + j\omega L_3) + \underline{I}_1 \cdot j\omega M_{13} - \underline{I}_2 \cdot j\omega M_{23}.$$

В матричном виде она запишется следующим образом:

$$\underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{U}, \text{ где } \underline{Z} = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M_{12} & j\omega M_{13} \\ -j\omega M_{12} & R_2 + j\omega L_2 & -j\omega M_{23} \\ j\omega M_{13} & -j\omega M_{23} & R_3 + j\omega L_3 \end{pmatrix}, \underline{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}, \underline{U} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим численные значения, получим:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} 15 + j \cdot 6,3 & -j \cdot 7 & j \cdot 4 \\ -j \cdot 7 & 7 + j \cdot 15,7 & -j \cdot 3,5 \\ j \cdot 4 & -j \cdot 3,5 & 10 + j \cdot 3,1 \end{pmatrix}, \underline{U} = \begin{pmatrix} 220 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для расчета этой задачи используем математический пакет Mathcad2000.

Фрагмент среды Mathcad2000 приведен ниже. Здесь мы будем приводить лишь результаты вычислений.

Решая данную систему, найдем токи:

$$\underline{I} = \underline{Z}^{-1} \cdot \underline{U}. \underline{I} = \begin{pmatrix} 12,68 - j2,48 \\ 4,94 + j0,50 \\ -2,02 - j2,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,92e^{-j0,193} \\ 4,96e^{j0,101} \\ 3,37e^{-j1,212} \end{pmatrix}$$

Модулем комплекса тока является действующее значение тока. Поэтому для получения амплитуды тока необходимо домножить модуль комплекса тока на $\sqrt{2}$. Получим:

$$i_1(t) = 12,92 \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 50t - 0,193) = 18,27 \sin(314t - 0,193);$$

$$i_2(t) = 4,9 \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 50t + 0,101) = 6,93 \sin(314t - 0,101);$$

$$i_3(t) = 3,37 \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi \cdot 50t - 0,212) = 4,77 \sin(314t - 0,212).$$

Данные начальные фазы получились в предположении, что начальная фаза напряжения U равна нулю.

Фрагмент среды Mathcad2000.

Параметры элементов схемы

$$R1 := 15 \quad R2 := 7 \quad R3 := 10$$

$$L1 := 20 \cdot 10^{-3} \quad L2 := 50 \cdot 10^{-3} \quad L3 := 10 \cdot 10^{-3}$$

$$U := 220 \quad \text{действующее значение напряжения источника}$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 50 \quad \text{угловая частота}$$

$$k12 := 0.7 \quad k23 := 0.5 \quad k13 := 0.9 \quad \text{коэффициенты взаимной индукции}$$

$$j := \sqrt{-1} \quad \text{обозначение мнимой единицы}$$

$$M12 := k12 \cdot \sqrt{L1 \cdot L2} \quad M13 := k13 \cdot \sqrt{L1 \cdot L3} \quad M23 := k23 \cdot \sqrt{L2 \cdot L3} \quad \text{взаимные индуктивности}$$

$$M12 = 0.022 \quad M13 = 0.013 \quad M23 = 0.011$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \text{определяем начало нумерации элементов массивов}$$

$$Z := \begin{pmatrix} R1 + j \cdot \omega \cdot L1 & -j \cdot \omega \cdot M12 & j \cdot \omega \cdot M13 \\ -j \cdot \omega \cdot M12 & R2 + j \cdot \omega \cdot L2 & -j \cdot \omega \cdot M23 \\ j \cdot \omega \cdot M13 & -j \cdot \omega \cdot M23 & R3 + j \cdot \omega \cdot L3 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 15 + 6.283i & -6.954i & 3.999i \\ -6.954i & 7 + 15.708i & -3.512i \\ 3.999i & -3.512i & 10 + 3.142i \end{pmatrix}$$

$$I := Z^{-1} \cdot E \quad I = \begin{pmatrix} 12.676 - 2.482i \\ 4.939 + 0.498i \\ -2.016 - 2.7i \end{pmatrix} \quad \text{решение системы уравнений}$$

$$|I_1| = 12.917 \quad \arg(I_1) = -0.193 \quad \arg(I_1) = -11.081\text{deg}$$

$$|I_2| = 4.964 \quad \arg(I_2) = 0.101 \quad \arg(I_2) = 5.759\text{deg}$$

$$|I_3| = 3.37 \quad \arg(I_3) = -2.212 \quad \arg(I_3) = -126.743\text{deg}$$

6. РЕЗОНАНС В ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Рассмотрим участок цепи, содержащий элементы R , L и C относительно двух выделенных зажимов (пассивный двухполюсник в цепи

синусоидального тока). Пусть этот участок содержит хотя бы по одному элементу L и C . В том случае, если ток и напряжение на входе схемы (т.е. на выделенных зажимах) совпадают по фазе, говорят, что в цепи *резонанс*. В случае резонанса входные комплексное сопротивление и комплексная проводимость цепи являются действительными числами, их мнимая часть равна нулю. Модуль комплексного сопротивления цепи имеет экстремум при резонансе, а аргумент при резонансе равен нулю. В цепи, где все реактивные элементы соединены между собой последовательно, говорят о *резонансе напряжений*, где параллельно – о *резонансе токов*. Если в цепи присутствуют разные виды соединений реактивных сопротивлений, говорят о *резонансе в сложной цепи*.

6.1. Резонанс напряжений

Рассмотрим так называемый последовательный колебательный контур. Простейший последовательный колебательный контур представляет собой последовательное соединение элементов R , L и C .

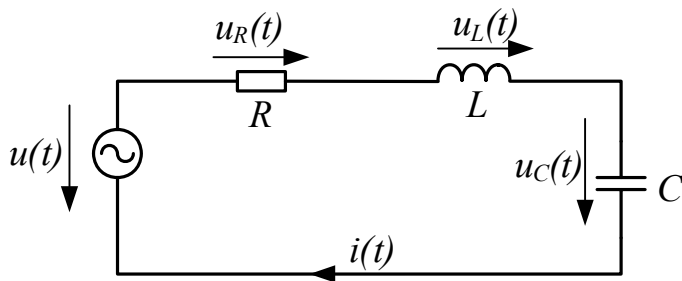


Рис. 6.1

Комплексное сопротивление этого участка равно, как было показано в примере 3, $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Резонанс напряжений будет в том случае, когда мнимая часть комплексного сопротивления равна нулю. Найдем, при какой частоте в цепи будет резонанс. $\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0$, отсюда $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Эта величина называется *резонансной частотой* и

является одной из резонансных характеристик. Другой характеристикой резонанса является *добротность*.

Добротность безразмерная величина, равная отношению емкостной или индуктивной мощности цепи (при резонансе они равны) к полной мощности цепи (при резонансе она равна активной мощности). Для данного участка добротность будет равна:

$$Q_{добр} = \frac{I^2 \omega_p L}{I^2 R} = \frac{L}{\sqrt{LC} R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}.$$

Числитель этого выражения представляет собой так называемое волновое сопротивление $\sqrt{L/C}$. Если рассматривать зависимости комплексного сопротивления (его модуля и аргумента) данной цепи от частоты (частотные характеристики), можно заметить, что при частоте, равной ω_p , зависимость модуля комплексного сопротивления имеет минимум, а зависимость аргумента комплексного сопротивления равна нулю и меняет знак.

Пример 11. В цепи, изображенной на рис. 6.1, параметры элементов следующие: $R = 10$ Ом, $L = 0,02$ Гн, $C = 100$ мкФ. Определить резонансную частоту и добротность. Построить треугольник сопротивлений при резонансе и графики зависимостей полного входного сопротивления (амплитудочастотная характеристика – АЧХ) и сдвига фаз между током и напряжением цепи (фазочастотная характеристика – ФЧХ) от частоты.

Решение. Определим резонансную частоту. Для данной схемы резонансная частота определяется по формуле:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,02 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 3162 \text{ рад/сек. Это соответствует круговой}$$

частоте $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{3162}{2\pi} = 503 \text{ Гц.}$ Далее определим добротность по

формуле $Q_{доб} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\sqrt{0,02/100 \cdot 10^{-6}}}{10} = 6,3.$

Построим треугольник сопротивлений рис. 6.2. В случае резонанса треугольник превращается в прямую линию, поскольку индуктивное и емкостное сопротивления равны. Для нашей схемы $R = 10 \text{ Ом,}$

$$X_L = \omega_p L = 63,2 \text{ Ом, } X_C = \frac{1}{\omega_p C} = 63,2 \text{ Ом.}$$

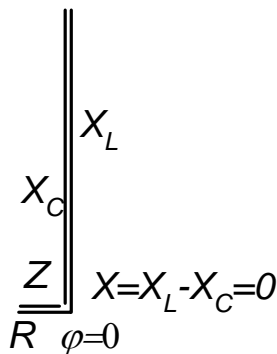


Рис. 6.2

Осталось построить частотные характеристики. Исходя из выражения для комплексного сопротивления для нашей схемы, получим выражение для полного сопротивления. Его зависимость от частоты представляет амплитудочастотную характеристику (АЧХ) нашей схемы

(рис. 6.3 а) $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$. График строим в диапазоне частот

от 0 до $5\omega_p$. Фазочастотная (ФЧХ) характеристика определяется, как зависимость аргумента комплексного сопротивления от частоты.

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \text{ (рис. 6.3 б).}$$

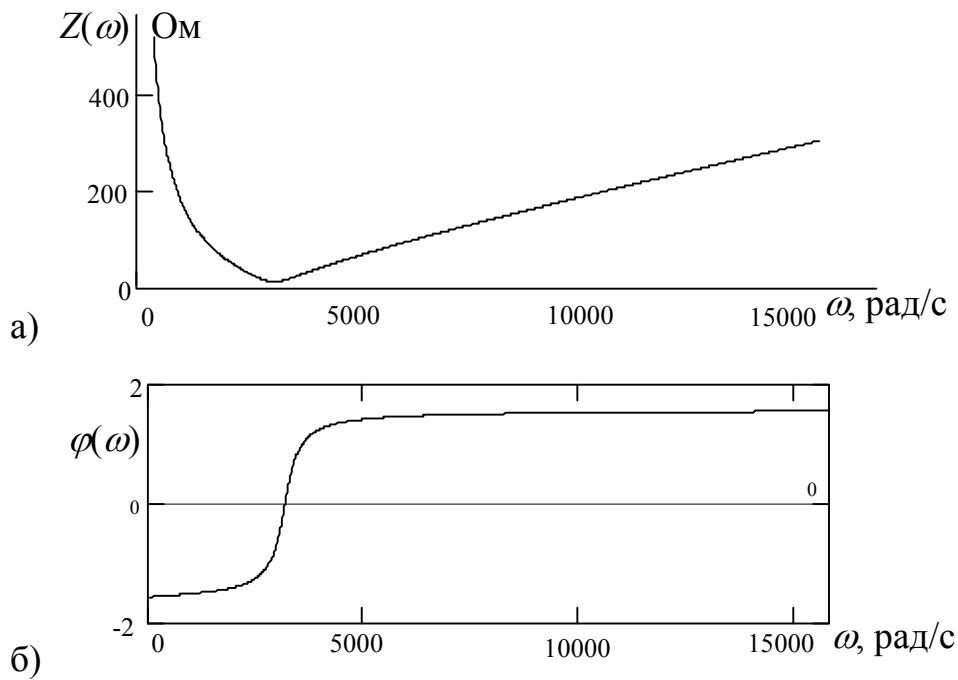


Рис. 6.3

6.2. Резонанс токов

Простейшей цепью, в которой возможен резонанс токов, является параллельный RLC контур.

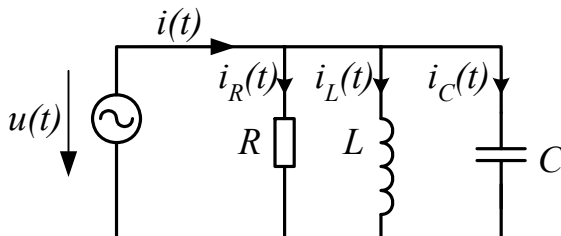


Рис. 6.4

Для определения резонанса рассмотрим комплексную проводимость данной схемы.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

Ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе в том случае, когда мнимая часть комплексной проводимости (реактивная проводимость схемы) равна нулю. Найдем частоту, при которой это условие выполняется

– резонансную частоту. $\frac{1}{\omega_p L} - \omega_p C = 0$, отсюда $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Определим добротность данной схемы. $Q_{добр} = \frac{U^2 / \omega_p L}{U^2 / R} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$. Если

в случае резонанса напряжений она получилась равной отношению волнового и активного сопротивления, то в случае резонанса токов она равна отношению соответствующих проводимостей.

6.3. Резонанс в сложной цепи

Явление резонанса в сложной цепи рассмотрим на примере.

Пример 12. В цепи, показанной на рис. 6.5, определить резонансную частоту. Построить графики зависимостей полного входного сопротивления и сдвига фаз от частоты. Параметры элементов цепи: $R_0=10$ Ом, $R_1=5$ Ом, $R_2=1,5$ Ом, $L_1=1$ мГн, $L_2=2$ мГн, $C=100$ мкФ.

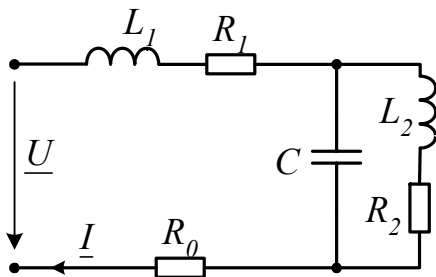


Рис. 6.5

Решение. . Элементы цепи соединены между собой следующим образом: R_0 , R_1 и L_1 – последовательно друг с другом и с участком, на котором параллельно соединены C и последовательное соединение R_2 и L_2 . Исходя из этого получим выражение для комплексного входного сопротивления

$$\underline{Z} = R_0 + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C}(j\omega L_2 + R_2)}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2 + R_2}.$$

Для того чтобы построить требуемые графики, необходимо представить \underline{Z} в комплексной форме, а затем в показательной. Преобразуем последнее слагаемое. Для того чтобы избавиться от комплексного числа в

знаменателе, сначала домножим и числитель и знаменатель на $j\omega C$, а затем на комплексно сопряженное знаменателю полученного выражения.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R_0 + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2 + R_2)}{1 - \omega^2 L_2 C + jR_2 \omega C} = \\ &= R_0 + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2 + R_2)(1 - \omega^2 L_2 C - jR_2 \omega C)}{(1 - \omega^2 L_2 C + jR_2 \omega C)(1 - \omega^2 L_2 C - jR_2 \omega C)} = \\ &= R_0 + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2 - j\omega^3 L_2^2 C + \omega^2 L_2 R_2 C + R_2 - R_2 \omega^2 L_2 C - jR_2^2 \omega C)}{(1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}.\end{aligned}$$

Теперь мы можем разделить действительную и мнимую части.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\underline{Z}) &= R_0 + R_1 + \frac{R_2}{(1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}; \\ \operatorname{Im}(\underline{Z}) &= \omega L_1 + \frac{(\omega L_2 - \omega^3 L_2^2 C + R_2^2 \omega C)}{(1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}.\end{aligned}$$

Вычислим полное сопротивление как модуль комплексного сопротивления.

$$\begin{aligned}Z = |\underline{Z}| &= \sqrt{\operatorname{Re}(\underline{Z})^2 + \operatorname{Im}(\underline{Z})^2} = \\ &= \sqrt{\left(R_0 + R_1 + \frac{R_2}{(1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}\right)^2 + \left(\omega L_1 + \frac{(\omega L_2 - \omega^3 L_2^2 C + R_2^2 \omega C)}{(1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2}\right)^2}.\end{aligned}$$

На данном этапе имеет смысл подставить численные значения и получить зависимость $Z(\omega)$ – АЧХ.

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(15 + \frac{1,5}{(1 - 2 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} \omega^2}\right)^2 + \left(1 \cdot 10^{-3} \omega + \frac{(1,775 \cdot 10^{-3} \omega - 4 \cdot 10^{-10} \omega^3)}{(1 - 2 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} \omega^2}\right)^2}$$

Получим теперь зависимость $\varphi(\omega)$ – ФЧХ.

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L_1 \left((1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2 \right) + (\omega L_2 - \omega^3 L_2^2 C + R_2^2 \omega C)}{(R_0 + R_1) \left((1 - \omega^2 L_2 C)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2 \right) + R_2} \right) =$$

$$= \operatorname{arctg} \left(\frac{1 \cdot 10^{-3} \omega \left((1 - 2 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} \omega^2 \right) + (1,775 \cdot 10^{-3} \omega - 4 \cdot 10^{-10} \omega^3)}{15 \cdot \left((1 - 2 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} \omega^2 \right) + 1,5} \right).$$

Найдем частоты, при которых в данной схеме имеет место резонанс. Для этого необходимо приравнять нулю мнимую часть комплексного сопротивления или его аргумент и решить это уравнение относительно частоты ω .

$$1 \cdot 10^{-3} \omega \left((1 - 2 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} \omega^2 \right) + (1,775 \cdot 10^{-3} \omega - 4 \cdot 10^{-10} \omega^3) = 0$$

Одним из корней этого уравнения является $\omega = 0$. Однако нулевое решение соответствует постоянному току и не может относиться к резонансам. Поэтому будем искать остальные корни, для чего, считая $\omega \neq 0$, разделим обе части уравнения на ω . Получим:

$$1 \cdot 10^{-3} \left((1 - 2 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} \omega^2 \right) + (1,775 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-10} \omega^2) = 0.$$

Это уравнение четвертой степени относительно ω , однако в него не входят нечетные степени, поэтому, заменив переменную $p = \omega^2$, найдем решение квадратного уравнения:

$$1 \cdot 10^{-3} \left((1 - 2 \cdot 10^{-7} p)^2 + 2,25 \cdot 10^{-8} p \right) + (1,775 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-10} p) = 0.$$

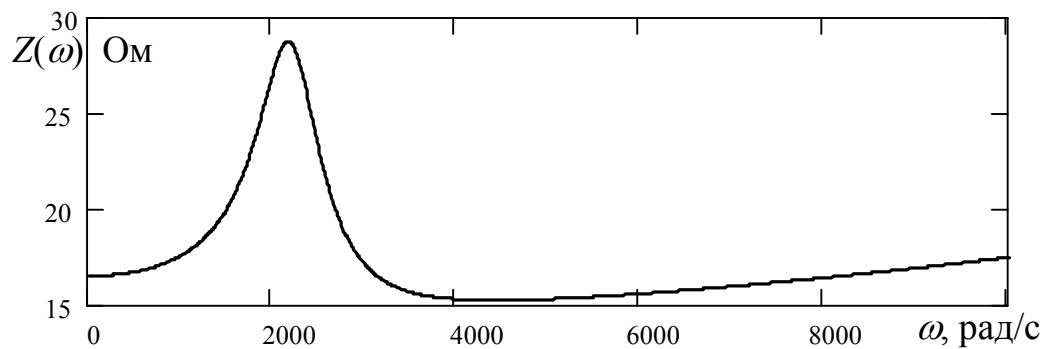
Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим уравнение:

$$p^2 \cdot 4 \cdot 10^{-17} + p \cdot 7,775 \cdot 10^{-10} + 2,775 \cdot 10^{-3} = 0.$$

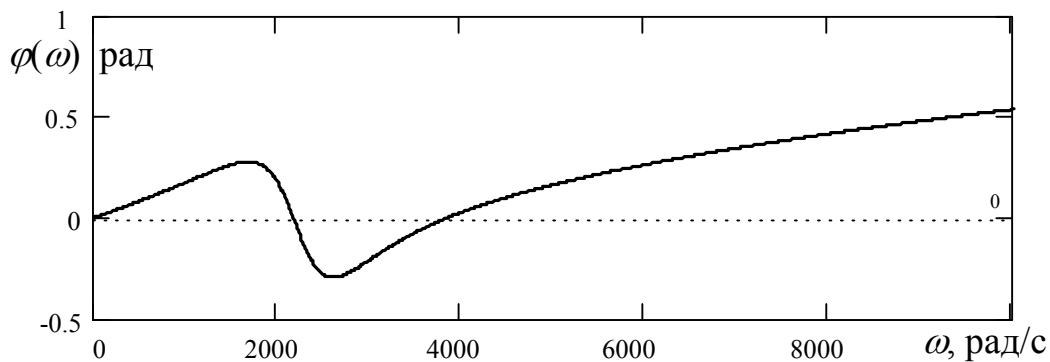
Оно имеет два корня: $p_1 = 4,711 \cdot 10^6 \text{ (1/с)}^2$, $p_2 = 1,473 \cdot 10^7 \text{ (1/с)}^2$. Каждому корню квадратного уравнения относительно p соответствует два корня уравнения четвертой степени $\omega = \pm \sqrt{p}$. Но поскольку отрицательное значение частоты не имеет физического смысла, мы выберем только

положительные решения. Получим два значения частоты, при которой в данной цепи резонанс: $\omega_1 = \sqrt{p_1} = 2,17 \cdot 10^3$ рад/с, $\omega_2 = \sqrt{p_2} = 3,838 \cdot 10^3$ рад/с.

Теперь можем построить графики. Пределы по горизонтальной оси нужно выбирать так, чтобы на графике присутствовали все резонансные частоты.



а)



б)

Рис. 6.6

На рис. 6.6 показаны зависимости АЧХ (рис. 6.6 а) и ФЧХ (рис. 6.6 б) для данной схемы. Мы видим, что при частотах, соответствующих резонансам, ФЧХ проходит через ноль, а АЧХ при частоте ω_1 имеет максимум, а при частоте ω_2 – минимум.

7. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА АКТИВНЫХ И РЕАКТИВНЫХ МОЩНОСТЕЙ

Мощностью называется скорость изменения энергии. Мощность какого либо участка цепи равна произведению силы тока, протекающего

по этому участку, и напряжения на этом участке. В цепях синусоидального тока мощность, определенная таким образом, будет функцией времени. Она называется *мгновенной мощностью* $p(t) = u(t)i(t)$. Пусть у нас есть некоторый участок цепи, ток и напряжение на этом участке соответственно $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, $u(t) = U_m \sin(\omega t)$. Тогда мгновенная мощность будет равна $p(t) = u(t)i(t) = U_m \sin(\omega t - \varphi)I_m \sin(\omega t)$. Преобразовав это выражение, можно получить $p(t) = U \cdot I \cos(\varphi) - U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi)$, где U и I – действующие значения тока и напряжения $U = U_m / \sqrt{2}$, $I = I_m / \sqrt{2}$.

Из полученного выражения видно, что мгновенная мощность может быть представлена в виде двух составляющих, постоянной и синусоидальной, удвоенной частоты. Среднее значение мгновенной мощности за период называется активной мощностью. Она обозначается символом P и будет равна постоянной составляющей мгновенной мощности. $P = U \cdot I \cos(\varphi)$. Единица измерения P – ватт (Вт). Активная мощность равна мощности, расходуемой на активной нагрузке. Она характеризует преобразование энергии электрического тока в другие виды энергии, всегда положительна, поскольку данная энергия не возвращается обратно в цепь. Величина, характеризующая преобразование энергии реактивными элементами, называется реактивной мощностью. Она обозначается символом Q и равна $Q = U \cdot I \sin(\varphi)$. Единица измерения Q – вольт ампер реактивный (вар). Реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от значения φ . В случае преобладания индуктивной нагрузки она положительна, емкостной – отрицательна. Величина $S = U \cdot I$ называется полной мощностью. Единица измерения S – вольт-ампер (ВА). Полная мощность связана с активной и реактивной следующим образом: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

При расчете цепей символическим методом пользуются понятием полной комплексной мощности $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$. Она определяется как

произведение комплекса напряжения на комплекс сопряженный току. С активной и реактивной мощностями она связана следующим образом:
 $\underline{S} = P + jQ$.

Комплексная мощность источника ЭДС $\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{I}^*$, где \underline{E} комплекс ЭДС, а \underline{I}^* – комплекс сопряженный току, протекающему в ветви источника.

Комплексная мощность участка цепи, содержащего $\underline{Z} = R + jX$, равна $\underline{S} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = (R + jX) \cdot I^2 = RI^2 + jXI^2$. Мы воспользовались тем, что $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$, и тем, что произведение числа на комплексно сопряженное ему равно квадрату модуля этого числа. Действительная часть комплексной мощности – это активная мощность, мнимая часть реактивная. Тогда мощность резистора, катушки индуктивности и конденсатора можно определить соответственно:

$$P = R \cdot I^2;$$

$$Q_L = X_L \cdot I^2;$$

$$Q_C = -X_C \cdot I^2.$$

Теорема о балансе мощностей утверждает, что сумма активных мощностей источников равна сумме активных мощностей нагрузки и сумма реактивных мощностей источников равна сумме реактивных мощностей нагрузки.

$$\sum \operatorname{Re}(\underline{E} \cdot \underline{I}^*) = \sum R \cdot I^2$$

$$\sum \operatorname{Im}(\underline{E} \cdot \underline{I}^*) = \sum X_L \cdot I^2 - \sum X_C \cdot I^2$$

В левой части от знака равенства суммирование ведется по источникам, в правой – по элементам цепи.

Взаимная индукция тоже вносит свой вклад в реактивную мощность схемы. Пусть некоторая цепь содержит две индуктивно связанные катушки L_1 и L_2 , взаимная индуктивность равна M_{12} . Пусть комплексы напряжений на этих катушках \underline{U}_1 и \underline{U}_2 , а комплексы токов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 . Для

определенности будем считать, что имеет место согласное включение. Тогда комплексная мощность этих индуктивно связанных катушек будет равна.

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* = (j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M_{12} \underline{I}_2) \cdot \underline{I}_1^* + (j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M_{12} \underline{I}_1) \cdot \underline{I}_2^* = j\omega L_1 |\underline{I}_1|^2 + j\omega L_2 |\underline{I}_2|^2 + j\omega M_{12} (\underline{I}_2 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2^*).$$

Представим комплексы токов в показательной форме: $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$, $\underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$. Тогда последняя скобка в выражении для \underline{S} преобразуется следующим образом:

$$\underline{I}_2 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{I}_1 \cdot \underline{I}_2^* = I_1 I_2 (e^{j\psi_2 - j\psi_1} + e^{j\psi_1 - j\psi_2}) = 2I_1 I_2 \cos(\psi_2 - \psi_1)$$

Получается, что реактивная мощность двух индуктивно связанных катушек имеет вид: $Q = \omega L_1 |\underline{I}_1|^2 + \omega L_2 |\underline{I}_2|^2 + \omega M_{12} 2|\underline{I}_1||\underline{I}_2| \cos(\psi_2 - \psi_1)$. Последнее слагаемое в этом выражении представляет собой вклад взаимной индукции в реактивную мощность. При встречном включении катушек он будет отрицательным, то есть перед последним слагаемым надо будет ставить знак минус.

Пример 13. Для цепи, рассмотренной в примере 7, составить уравнение баланса активных и реактивных мощностей.

Решение. В данной цепи содержится два источника ЭДС. Вычислим комплексную мощность этих источников.

$$\underline{S} = \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^*,$$

$$\text{здесь } \underline{E}_1 = 220 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 190,5 + j \cdot 110 \text{ В,}$$

$$\underline{E}_2 = 120 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \cdot 120 \text{ В,}$$

$$\underline{I}_1 = 3,087 e^{j0,998} = 1,671 + j2,596 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = 2,065 \cdot e^{j4,331} = -0,767 - j1,918 \text{ А.}$$

В выражение входят величины, комплексно сопряженные токам. Подставим данные значения в выражение для полной мощности.

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= (190,5 + j110)(1,671 - j2,596) - j120(-0,767 + j1,918) = \\
&= (190,5 \cdot 1,671 + j110 \cdot 1,671 - 190,5 \cdot j2,596 - j110 \cdot j2,596) + \\
&+ j120 \cdot 0,767 - j1,918j120 = \\
&= 318,3 + j183,8 - j494,5 + 285,6 + j92 + 230,2 = \\
&= 834,1 - j218,7 \text{ ВА}
\end{aligned}$$

Теперь вычислим активную и реактивную мощности приемников.

$$P = R_1 \cdot |\underline{I}_1|^2 + R_2 \cdot |\underline{I}_2|^2 + R_3 \cdot |\underline{I}_3|^2, \text{ здесь } \underline{I}_3 = 0,904 + j0,678 = 1,13e^{j0,644} \text{ А,}$$

$$P = 45 \cdot 3,087^2 + 80 \cdot 2,065^2 + 50 \cdot 1,13^2 = 428,8 + 341,1 + 63,8 = 833,7 \text{ Вт.}$$

Реактивные сопротивления ветвей уже были вычислены в примере 7.

Это мнимые части комплексных сопротивлений:

$$\underline{Z}_1 = 45 - j \cdot 29,5; \underline{Z}_2 = 80 + j \cdot 11,8; \underline{Z}_3 = 50 + j \cdot 9,4.$$

Тогда реактивная мощность

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\omega \cdot L_1 - \frac{1}{\omega \cdot C_1} \right) \cdot |\underline{I}_1|^2 + \left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2} \right) \cdot |\underline{I}_2|^2 + \omega \cdot L_3 \cdot |\underline{I}_3|^2 = \\
&= (-29,5) \cdot 3,087^2 + 11,8 \cdot 2,065^2 + 9,4 \cdot 1,13^2 = \\
&= -281,1 + 50,3 + 473,0 = -218,8 \text{ вар.}
\end{aligned}$$

Мы видим, что баланс мощностей сходится с точностью до 0,5 Вт.

Эта величина сравнима с погрешностью вычисления, при условии что значения токов округляются до 0,001 А, значения напряжений – до 0,1 В, а значения сопротивлений – до 0,1 Ом.

Пример 14. Для цепи, рассмотренной в примере 9, составить уравнение баланса активных и реактивных мощностей.

Решение. Данный пример отличается от предыдущего только наличием взаимной индукции. Поэтому формула для мощности источника будет такой же, как и в предыдущем примере. Отличаться будут только численные значения токов: $\underline{I}_1 = 1,808 + j2,488$, $\underline{I}_2 = -1,273 - j1,349$, $\underline{I}_3 = 0,535 + j1,139$.

$$\text{Вычислим мощность источника: } \underline{S} = \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^*$$

$$\underline{S} = (190,5 + j110)(1,808 - j2,488) - j120(-1,273 + j1,349) = 779,9 - j122,4 \text{ ВА.}$$

Вычислим теперь мощность приемников. Выражение для активной мощности также не отличается от аналогичного выражения из предыдущего примера: $P = R_1 \cdot |\underline{I}_1|^2 + R_2 \cdot |\underline{I}_2|^2 + R_3 \cdot |\underline{I}_3|^2$. Подставим новые значения токов, получим:

$$P = 45 \cdot (1,808^2 + 2,488^2) + 80 \cdot (1,273^2 + 1,349^2) + 50 \cdot (0,535^2 + 1,139^2) = 780 \text{ Вт.}$$

Выражение для реактивной мощности будет иметь отличия от предыдущего примера, связанные с учетом взаимной индуктивности.

$$Q = \left(\omega \cdot L_1 - \frac{1}{\omega \cdot C_1} \right) \cdot |\underline{I}_1|^2 + \left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2} \right) \cdot |\underline{I}_2|^2 + \omega \cdot L_3 \cdot |\underline{I}_3|^2 -$$

$$- 2\omega M_{12} |\underline{I}_1| |\underline{I}_2| \cos(\psi_2 - \psi_1) - 2\omega M_{13} |\underline{I}_1| |\underline{I}_3| \cos(\psi_3 - \psi_1) + 2\omega M_{23} |\underline{I}_3| |\underline{I}_2| \cos(\psi_2 - \psi_3)$$

По сравнению с предыдущим примером в данное выражение входят еще три (последних) слагаемых, выражающие реактивную мощность, обусловленную взаимной индукцией первой и второй катушки, первой и третьей, второй и третьей соответственно. Первое и второе слагаемые отрицательны, поскольку первая катушка соединена встречно со второй и третьей. Третье слагаемое положительно, поскольку вторая и третья катушки согласно соединены между собой. Для того чтобы подставить численные значения, нужно представить комплексы токов в показательной форме.

$$\underline{I}_1 = 1,808 + j2,488 = 3,075e^{j0,942} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_2 = -1,273 - j1,349 = 1,855e^{-j2,327} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_3 = 0,535 + j1,139 = 1,258e^{j1,132} \text{ А.}$$

Осталось только подставить численные значения. Получим реактивную мощность цепи.

$$Q = (-29,5) \cdot 3,075^2 + (11,8) \cdot 1,855^2 + 9,4 \cdot 1,258^2 -$$

$$- 2 \cdot 942 \cdot 0,021 \cdot 3,075 \cdot 1,855 \cos(-2,372 - 0,942) -$$

$$- 2 \cdot 942 \cdot 0,008 \cdot 3,075 \cdot 1,258 \cos(1,132 - 0,942) +$$

$$+ 2 \cdot 942 \cdot 0,015 \cdot 1,258 \cdot 1,855 \cos(-2,372 - 1,132) = -120 \text{ вар.}$$

Как и в предыдущем примере, баланс мощностей сошелся с допустимой точностью.

8. ВЕКТОРНАЯ ДИАГРАММА ТОКОВ И ТОПОГРАФИЧЕСКАЯ ДИАГРАММА НАПРЯЖЕНИЙ

Векторной диаграммой токов называется изображение токов в виде векторов на плоскости. Длина вектора пропорциональна его действующему значению, направление вектора определяется начальной фазой. При расчете цепей символическим методом векторные диаграммы токов изображают на комплексной плоскости. При этом началом вектора тока является начало координат, а концом точка, соответствующая комплексу тока. Таким образом, координатами вектора тока на комплексной плоскости являются действительная и мнимая часть комплекса тока.

Пример 15. Для цепи, рассмотренной в примере 7, построить векторную диаграмму токов.

Решение. Токи, полученные для данной схемы:

$$\underline{I}_1 = 1,671 + j2,596;$$

$$\underline{I}_2 = -0,767 - j1,918$$

$$\underline{I}_3 = 0,904 + j0,678$$

Построим векторную диаграмму токов. Координатами конца каждого вектора на комплексной плоскости являются действительная и мнимая часть комплекса тока. Из векторной диаграммы можно убедиться в выполнении первого закона Кирхгофа, поскольку вектор \underline{I}_3 является суммой векторов \underline{I}_1 и \underline{I}_2 .

Топографическая диаграмма напряжений представляет собой совокупность точек на комплексной плоскости, каждая из которых является комплексным потенциалом соответствующей точки схемы. Напряжениям на топографической диаграмме соответствуют векторы, проведенные между точками, между которыми определяется напряжение.

В этом случае, как и в векторной диаграмме, длина вектора будет соответствовать действующему значению, а угол наклона относительно действительной оси начальной фазе напряжения. Следует обратить внимание на выбор направления напряжения. Например, напряжению U_{ab} будет соответствовать вектор, проведенный из точки b в точку a , поскольку $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$.

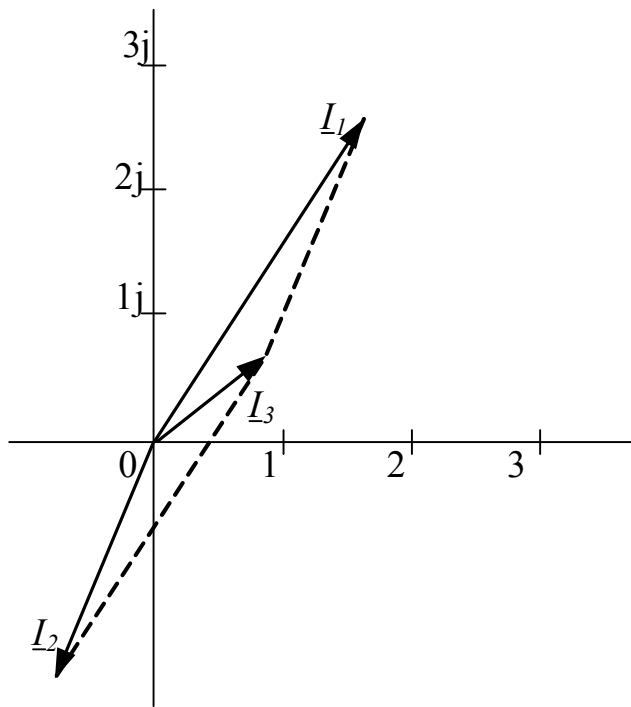


Рис. 8.1 Векторная диаграмма токов

Пример 16. Для цепи, рассмотренной в примере 7, построить топографическую диаграмму напряжений для точек, лежащих на внешнем контуре.

Решение. Пронумеруем точки, лежащие на внешнем контуре, как показано на рис. 8.2.

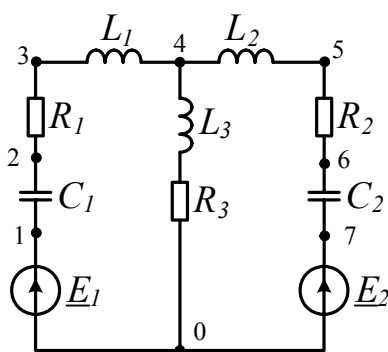


Рис. 8.2

Вычислим потенциалы этих точек. При этом считаем, что напряжение на каком-либо участке цепи сонаправлено с током. Ток в цепи вне источников течет, условно говоря, от большего потенциала к меньшему. Поэтому, когда мы «движемся» по току, нам нужно вычитать напряжение данного участка, а когда против тока – складывать. Например, напряжение на конденсаторе C_1 равно $\underline{I}_1 \frac{1}{j\omega C_1}$. Оно направлено по току от точки 1 к точке 2. Поэтому $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, отсюда $\varphi_2 = \varphi_1 - U_{12}$ и, следовательно, $\varphi_2 = \varphi_1 - \underline{I}_1 \frac{1}{j\omega C_1}$. Для участков с источниками считается, что потенциал точки на конце стрелочки выше, чем в начале стрелочки, на величину ЭДС. Поэтому, когда мы «движемся» по стрелочке, мы прибавляем величину ЭДС, а когда против – отнимаем. Таким образом, получаем:

$$\varphi_0 = 0; \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \underline{E}_1; \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \underline{I}_1 \frac{1}{j\omega C_1}; \quad \varphi_3 = \varphi_2 - \underline{I}_1 R_1; \quad \varphi_4 = \varphi_3 - \underline{I}_1 j\omega L_1;$$

$$\varphi_5 = \varphi_4 + \underline{I}_2 j\omega L_2; \quad \varphi_6 = \varphi_5 + \underline{I}_2 R_2; \quad \varphi_7 = \varphi_6 + \underline{I}_2 \frac{1}{j\omega C_2}; \quad \varphi_8 = \varphi_7 - \underline{E}_2.$$

Подставив в эти формулы численные значения, получим значения потенциалов в точках.

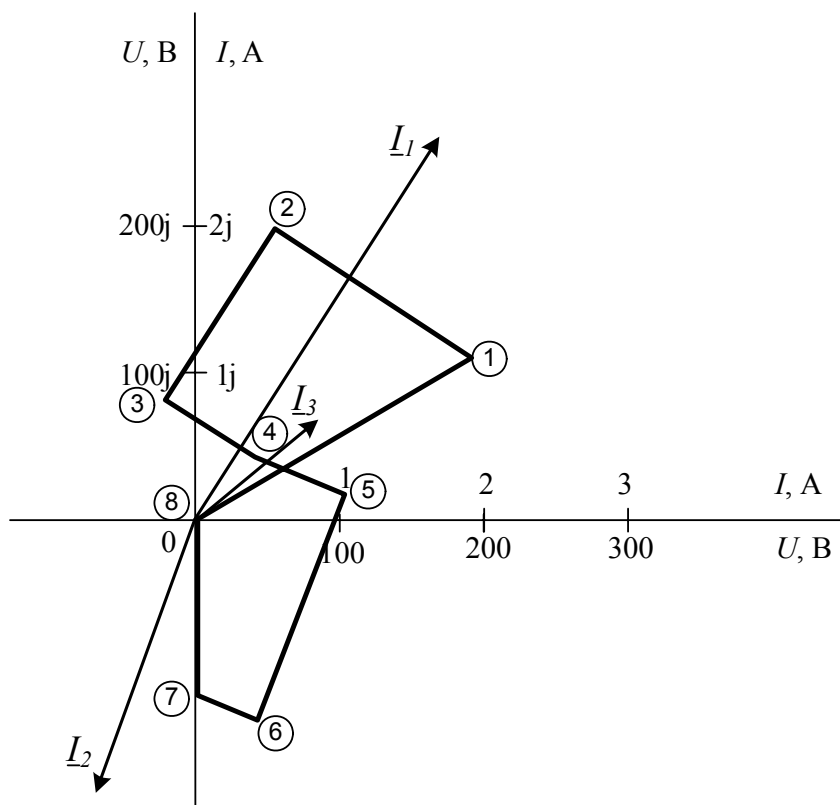


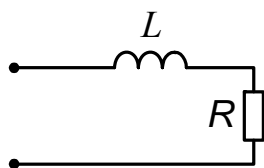
Рис. 8.3

На рис. 8.3 показаны топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов, построенные на одном графике. Из данной диаграммы видно, что отрезки, соответствующие напряжениям на конденсаторе и катушке индуктивности, перпендикулярны вектору тока соответствующей ветви, а отрезки, соответствующие напряжениям на резистивных элементах, параллельны векторам соответствующих токов. Это соответствует сдвигу фаз $\pm \frac{\pi}{2}$ и 0 соответственно.

9. ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Задача № 1

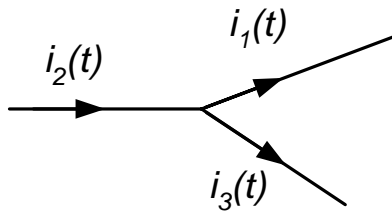
Полное сопротивление цепи при $f = 100$ Гц равно $Z = 5$ Ом. Чему будет равно Z при $f = 150$ Гц, если $R = 3$ Ом ?



Задача № 2

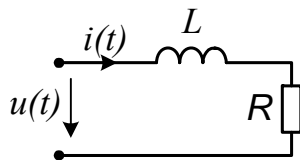
Токи в ветвях 1 и 2 даны: $i_1 = 5 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ)$ А, $i_2 = 5 \cdot \sin(\omega t - 120^\circ)$ А.

Определить ток i_3 .



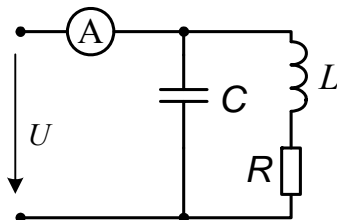
Задача № 3

Найти мгновенное значение приложенного напряжения $u(t)$. Построить топографическую диаграмму напряжений; $L = 15$ мГн, $R = 20$ Ом, $i(t) = 2 \cdot \sin(1000t)$ А.



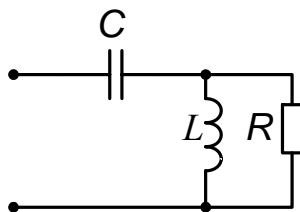
Задача № 4

Найти показания амперметра. $X_L = 7$ Ом, $X_C = 20$ Ом, $R = 7$ Ом, $U = 10$ В.



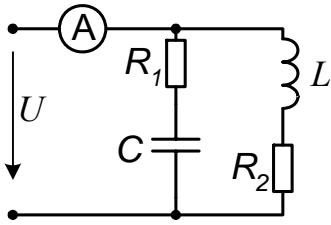
Задача № 5

Определить значение X_L , если в цепи резонанс. $X_C = 20$ Ом, $R = 40$ Ом.



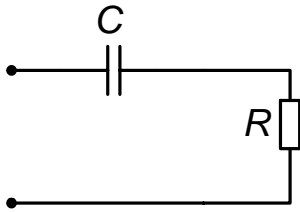
Задача № 6

Найти показания прибора, если в цепи $X_L = 10$ Ом, $X_C = 30$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $U = 20$ В, $R_2 = 40$ Ом



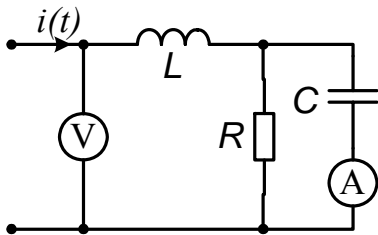
Задача № 7

Определить U и I , если полная комплексная мощность $\underline{S} = (100 - j \cdot 60) \text{ ВА}$,
 $R = 400 \text{ Ом}$, $C = 4,17 \text{ мкФ}$.



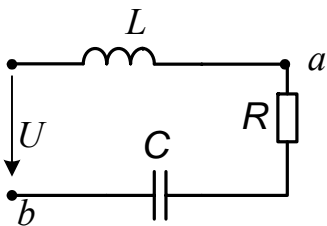
Задача № 8

Определить показания приборов, если $i(t) = 2\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ А}$, $X_L = 60 \text{ Ом}$,
 $X_C = 40 \text{ Ом}$, $R = 40 \text{ Ом}$.



Задача № 9

Рассчитать напряжение U_{ab} . $X_L = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 15 \text{ Ом}$, $R = 10 \text{ Ом}$, $U = 10 \text{ В}$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 2-х т. Учебник для вузов. Том 1 . –3-е изд., перераб. и доп. –Л.: Энергоиздат, 1981. –536 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. -10-е изд. –М.: Гардарики, 2000. – 638 с.
3. Зевеке Г.В., Ионкин П.А. Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов –М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
4. Цапенко Е.Ф. Теоретические основы электротехники для горных вузов– Часть 1, Линейные электрические цепи.–М.: МГГУ, 2005, 345 с.
5. Бессонов Л.А., Демидова И.Г., Заруди М.Е. и др. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энерг. и приборост. Спец. Вузов.–4-е изд., перераб./ под ред Л.А. Бессонова. – М.: Высш. шк.; 2000. –528 с.